අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

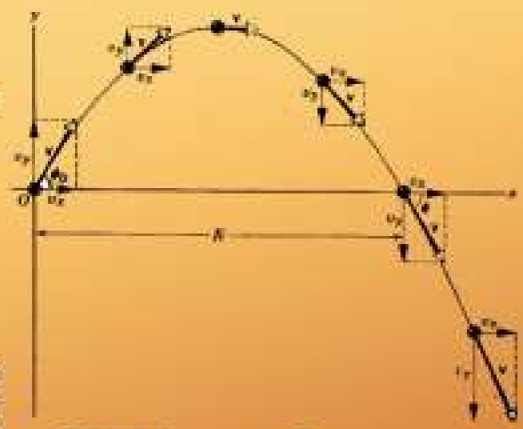
සංයුක්ත ගණිතය

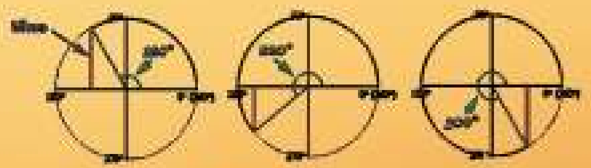
පුහුණු වීමේ ප්‍රශ්නාවලිය

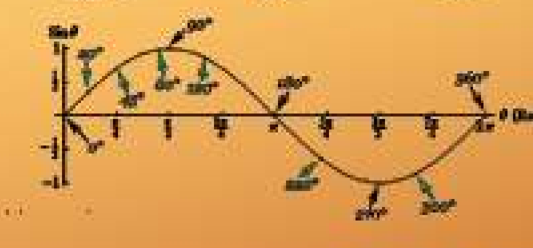
(පිළිතුරු සමඟ)

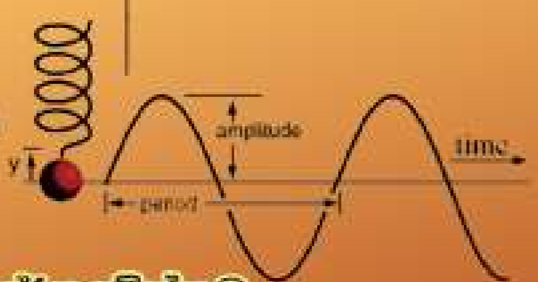
(2017 නව විෂය නිර්දේශයට අනුව සකස් කරන ලද)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$









ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
ශ්‍රී ලංකාව
www.nie.lk

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

සංයුක්ත ගණිතය

පුහුණුවීමේ ප්‍රශ්නාවලිය
පිළිතුරු සමඟ

(2017 නව විෂය නිර්දේශයට අනුව සකස් කරන ලද)

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
ශ්‍රී ලංකාව
www.nie.lk

සංයුක්ත ගණිතය
පුහුණුවීමේ ප්‍රශ්නාවලිය (පිළිතුරු සමඟ)

ප්‍රථම මුද්‍රණය 2018

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

මුද්‍රණය :
මුද්‍රණාලය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
මහරගම

අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්තුමියගේ පණිවිඩය

ගණිත අධ්‍යාපනය සංවර්ධනය කිරීම සඳහා ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් කාලෝචිත ව විවිධ ක්‍රියා මාර්ග අනුගමනය කරමින් සිටී. ''**පුහුණුවීමේ ප්‍රශ්නාවලිය පිළිතුරු සමඟ**'' නමින් රචිත පොත එහි එක් ප්‍රතිඵලයකි.

දොළහ සහ දහතුන්වන ශ්‍රේණිවලවල විෂය නිර්දේශ හැදෑරීමෙන් පසු පැවැත්වෙන අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය සඳහා සිසුන් සූදානම් කිරීම පාසලේ ගුරුවරයාට පැවරෙන ප්‍රධාන කාර්යයකි. මේ සඳහා යෝග්‍ය ඇගයීම් උපකරණ බෙහෙවින් විරල වේ. වෙළෙඳපොලේ පවත්නා බොහොමයක් උපකරණ වලංගු බවින් හා ගුණාත්මක බවින් ඌන ප්‍රශ්නවලින් සමන්විත ප්‍රශ්න පත්‍රවලින් යුක්ත බව නොරහසකි. මෙම තත්ත්වය වළක්වා සිසුන්ට විභාගයට මනා ලෙස සූදානම් වීම සඳහා ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව මෙම සංයුක්ත ගණිතය ''**පුහුණුවීමේ ප්‍රශ්නාවලිය පිළිතුරු සමඟ**'' සකස් කර ඇත. මෙය විෂය නිර්දේශයට අනුව සකසා, පූර්ව පරීක්ෂණයන්ට ලක් කර කරන ලද වටිනා ප්‍රශ්න ඇතුළත් ග්‍රන්ථයකි. ප්‍රශ්න සමඟ ඒවායේ උත්තර ඇතුළත් කර තිබීම ගුරුවරුන්ට මෙන් ම සිසුන්ට ද බෙහෙවින් ප්‍රයෝජනවත් වන බව නිසැක ය.

මෙම පොත පරිශීලනයෙන් ගණිත විෂයයේ ඇගයීම් ක්‍රියාවලිය සාර්ථක කර ගන්නා මෙන් ගුරුවරුන්ගෙන් ද, සිසුන්ගෙන් ද ඉල්ලා සිටිමි.

''**පුහුණුවීමේ ප්‍රශ්නාවලිය පිළිතුරු සමඟ**'' ඔබ අතට පත් කිරීම සඳහා අනුග්‍රහය දැක් වූ AusAid ව්‍යාපෘතියටත්, මෙම කාර්යය සාර්ථක කර ගැනීමට ශාස්ත්‍රීය දායකත්වය සැපයූ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයට හා බාහිර විද්වතුන් සියලු දෙනාටත් මගේ ප්‍රණාමය හිමි වේ.

ආචාර්ය ජයන්ති ගුණසේකර
අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

අධ්‍යක්ෂතුමාගේ පණිවිඩය

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විෂයධාරාවන් අතර ගණිතය විෂයධාරාව සඳහා සුවිශේෂී ස්ථානයක් හිමිව ඇත. අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (සාමාන්‍ය පෙළ) විභාගයෙන් උසස් ලෙස සමත්වන සිසුන් විශේෂයෙන් ගණිත විෂය ධාරාවට ප්‍රිය කරයි. රටකට සහ ලෝකයට ඔබින නවෝත්පාදක රාශියක් බිහි කිරීමට දායක වූ විශේෂඥයින් බිහි කර ඇත්තේ උසස් පෙළ ගණිත විෂයධාරාව හැදෑරූ සිසුන් බව අතීතය මැනවින් සාක්ෂි කරයි.

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) ගණිත විෂයයන් සඳහා විෂයමාලාව සකස් කර ඇත්තේ විද්‍යාත්මක ලෝකයට, තාක්ෂණ ලෝකයට සහ වැඩලෝකයට අත්‍යවශ්‍ය විද්වතුන් බිහි කර දීමේ පරම චේතනාව ඇතිවයි.

වර්ෂ 2017 සිට උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිත විෂය සහ උසස් පෙළ ගණිත විෂය සඳහා සංශෝධිත නව විෂයමාලාවක් ක්‍රියාත්මක වේ. මෙම විෂයමාලාව ඉගෙන ගන්නා ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන්ගේ ඉගෙනුම පහසුව සඳහා පුහුණු ප්‍රශ්න සහ උත්තර ඇතුළත් පොතක් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් සකස් කර ඇත. මෙම පොතේ ඇතුළත් ප්‍රශ්න සිසුන්ගේ සංකල්ප සාධන මට්ටම මැන බැලීමටත් ඉදිරියේ දී පවත්වන අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය සඳහා පෙර සූදානමටත් සුදුසු වන පරිදි සකස් කර ඇත. ප්‍රශ්නයට අදාළ උත්තර සපයා දීමෙන් බලාපොරොත්තු වන්නේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන් ප්‍රශ්නයක් සඳහා උත්තරය ලබාදීමේ දී අනුගමනය කළ යුතු පියවර සහ ක්‍රමවේද පිළිබඳ ව අත්දැකීමක් ලබාදීම යි. එමඟින් උත්තරය පෙළගැස්විය යුතු ආකාරය පිළිබඳ ව සිසුන්ට තම හැකියා, කුසලතා සහ දැනුම වැඩි දියුණු කර ගැනීමට හැකිවේ. මෙම ප්‍රශ්න සහ උත්තර සකස් කිරීමට විශේෂඥතාවයක් ඇති විශ්වවිද්‍යාල කථිකාචාර්යවරුන් ගුරුවරුන් සහ විෂයමාලා විශේෂඥයින්ගේ සම්පත් දායකත්වය ලබා දී ඇත. තවද මෙම ප්‍රශ්න සකස් කිරීමේ දී එක් එක් විෂය අන්තර්ගතයන් සඳහා විවිධ මාන ඔස්සේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන්ගේ අවධානය යොමු කිරීමටත්, සිසුන්ගේ දැනුම පුළුල් කර ගැනීමටත් අවස්ථාව ලබා දීමට හා මග පෙන්වීමට අවධානය යොමු කර ඇත. ගුරුවරුන්ගේ උපදෙස් සහ මග පෙන්වීම යටතේ මෙන් ම ස්වයංව ඉගෙනුම සඳහාත් උචිත ලෙස මෙම පොත සකස් කර ඇත.

මෙවැනි වටිනා පොතක් නිර්මාණය කිරීමට අවශ්‍ය උපදෙස් සහ මග පෙන්වීම ලබාදුන් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්තුමියට සහ සම්පත් දායකත්වය දැක් වූ සැමටත් ස්තුතියි. මෙම පොත භාවිත කර එමඟින් ලබන අත්දැකීම් තුළින් නැවත මුද්‍රණයක දී භාවිතයට සුදුසු ධනාත්මක අදහස් අප වෙත ලබා දෙන ලෙස ගෞරවයෙන් ඉල්ලා සිටිමි.

කේ. රංජිත් පත්මසිරි
අධ්‍යක්ෂ
ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

විෂයමාලා කමිටුව

අනුමැතිය **:** ශාස්ත්‍රීය කටයුතු මණ්ඩලය,
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

උපදේශකත්වය **:** ආචාර්ය ටී. ඒ. ආර්. ජේ. ගුණසේකර මිය
අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

අධීක්ෂණය **:** කේ. රංජිත් පත්මසිරි මයා,
අධ්‍යක්ෂ, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව,
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

විෂය සම්බන්ධීකරණය : එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා
ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

කේ. කේ. වජීමා එස්. කංකානම්ගේ මෙණෙවිය
සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

සම්පත් දායකත්වයः

ජී. පී. එච්. ජගත් කුමාර මයා	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
එම්. නිල්මිණි පී. පීරිස් මිය	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
සී. සුදේශන් මයා	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
පී. විජායිකුමාර් මයා	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
කේ.කේ.වජීමා එස්. කංකානම්ගේ මෙය	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

කතෘ මණ්ඩලය :

කේ. ගනේෂලිංගම් මයා	විශ්‍රාමික ප්‍රධාන ව්‍යාපෘති නිලධාරි ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
වී. රාජරත්නම් මයා	විශ්‍රාමික ආචාර්ය

ටී. සිදම්බරනාදන් මයා	විශ්‍රාමික ආචාර්ය
එන්. ආර්. සහබන්දු මයා	විශ්‍රාමික ආචාර්ය
එච්. ඩී. සී. එස්. ප්‍රනාන්දු මයා	ගුරු සේවය, විවේකානන්ද විද්‍යාලය, කොළඹ 13
එස්. ජී. දොලුවීර මයා	ගුරු සේවය, වෙස්ලි විදුහල කොළඹ 09

පරිගණක වදන් සැකසීම	:	මොනිකා විජේකෝන්, විවෘත පාසල ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
		ඉරේෂා රංගනා දිසානායක මෙනවිය මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
පිටකවරය	:	ඊ. එල්. ඒ. කේ. ලියනගේ මයා මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
		අනූෂා තරංගනී මිය මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
විවිධ සහාය	:	එස්. හෙට්ටිආරච්චි මයා ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
		කේ. එන්. සේනානි මිය ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
		ආර්. එම්. රූපසිංහ මයා ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව

පෙරවදන

අධ්‍යාපන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) ශ්‍රේණිවල සංයුක්ත ගණිතය ඉගෙනුම ලබන සිසුන් පුහුණු වීම සඳහා මෙම පොත සකස් කර ඇත. සිසුන්ට ප්‍රමාණවත් අභ්‍යාස ලබා දීම සඳහාත්, විෂය ධාරාව හැදෑරූ පසු විභාගයට සූදානම් කිරීම පිණිස අභ්‍යාස කරවීමේ අරමුණෙන් මෙම පොත සකස් කර ඇත. මෙය ආදර්ශ ප්‍රශ්න පත්‍ර කට්ටලයක් නොවන බවත් අභ්‍යාස ප්‍රශ්නවල එකතුවක් බවත් සිසුන් ගුරුවරුන් වටහා ගත යුතුයි.

මෙම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලයේ අභ්‍යාස කළ පසු දී ඇති පිළිතුරු සමග තමන්ගේ පිළිතුරු සසඳා බැලිය හැකි ය. මෙහි දී ඇති ආකාරයේ ම සියලුම පියවර සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල තිබීම අතවශ්‍ය නොවේ. ඔබේ පිළිතුරුවල නිවැරදිතාවය බැලීමටත් පියවර නිවැරදිව අනුගමනය කිරීමට මග පෙන්වීමක් ලෙස මෙහි පිළිතුරු දී ඇති බව වටහා ගන්න.

මෙම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලය වර්ෂ 2017 සිට ක්‍රියාත්මක වන සංශෝධිත විෂය මාලාවට අනුව 2019 අවුරුද්දේ ප්‍රථම වරට අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගයට පෙනී සිටින සිසුන් ඉලක්ක කරගෙන සකස් කර ඇත. නමුත් සංයුක්ත ගණිතය, උසස් ගණිතය, ගණිතය වැනි විෂයන් හදාරණ තමන්ගේ විෂයධාරාවට අනුව ප්‍රශ්න කට්ටලය භාවිත කළ හැකි ය.

ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් එළි දක්වන අ.පො.ස (උ.පෙළ) සඳහා වූ ප්‍රථම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලයට අමතරව ස්ථිතිකය - I ස්ථිතිතය - II, සංයුක්ත ගණිතය I, සංයුක්ත ගණිතය II සඳහා ඒකක අනුව සකස් කළ අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටල ඉක්මනින් එළි දැක්වීමට නියමිතය.

මෙම පොතෙහි ඇති අඩුපාඩු සම්බධන්ව අදහස් අප වෙත යොමු කරන්නේ නම් නැවත මුද්‍රණයේ දී සකස් කිරීමට හැකි වේ. ඔබේ අදහස් අප මහත් අගය කොට සලකන බවත් මෙයින් දන්වා සිටිමි.

එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා
ව්‍යාපෘති නායක
12 - 13 ශ්‍රේණි ගණිතය

පටුන

සංයුක්ත ගණිතය I

A කොටස

1. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)-14=0$ විසඳන්න

2. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2x-1}$ විසඳන්න

3. $\log_9\left(xy^2\right)=\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3 y$ බව පෙන්වන්න

$\left(\text{ඉගිය : } \log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}\right)$

එනයින් පහත සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

$\log_9(xy^2)=\frac{1}{2}$

$\log_3 x.\log_3 y=-3$

4. $f(x)=3x^3+Ax^2-4x+B$; යයි සිතමු. මෙහි A හා B නියත වේ. $(3x+2)$, $f(x)$ හි සාධක යයි ද $f(x)$, $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 2 යයි ද දී ඇත.
   (i) A හි හා B හි අගය සොයන්න.
   (ii) $f(x)$ ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

5. $f(x)=x^4+hx^3+gx^2-16x-12$ යයි ගනිමු. මෙහි h හා g නියත වේ. $(x+1), f(x)$ හි සාධකයක් බවත් $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -24 බවත් දී ඇත.
   (i) hහි හා g හි අගයන් සොයන්න.
   (ii) $(x-2)$, $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වා ඉතිරි සාධක සොයන්න.

6. $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ. $x+2+\frac{1}{x}=\frac{b^2}{ac}$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරින් සොයන්න.

7. $x^2+bx+ca=0,$ හා $x^2+cx+ab=0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම් හා a,b,c සියල්ල වෙනස් නම් සමීකරණ දෙකෙහි අනෙක් මූල මගින් $x^2+cx+bc=0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

8. $g(x) = ax^2 - 2x + (3a+2)$ නම් x හි සියලු තාත්ත්වික අගය සඳහා $g(x)$ ධන වන a හි අගය කුලකය සොයන්න.

$a = \frac{1}{3}$ විට හි $y = g(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

9. $\frac{12}{x-3} \le x+1$ අසමානතාව් විසඳුම් කුලකය සොයන්න.

10. $|1-2x| - |x+2| \le 2$ විසඳන්න.

11. ගැහැනු ළමයි හතර දෙනෙකු හා පිරිමි ළමයි හතර දෙනෙකු පේළියක වාඩි කරවිය හැකි ආකාර ගණන කොපමණ ද?
(i) විශේෂ ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනෙකු එකට වාඩි නොවන සේ
(ii) කිසි ම ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනෙකු එකට වාඩි නොවන සේ වාඩි කරවිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

12. $\left(x^2 - \frac{2k}{x}\right)^{10}$ හි ප්‍රසාරණයේ x^2 පදයේ සංගුණකය $\frac{1}{x}$ පදයේ සංගුණකයට සමාන වන k හි අගයන් දක්වන්න.

13. $(1+2x+kx^2)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^2 හා x^3 පදවල සංගුණකය k හා n පදවලින් සොයන්න. මෙහි n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. x^2 හා x^3 පදවල සංගුණකය පිළිවෙළින් 30 හා 0 නම් K හි හා n හි අගයන් සොයන්න.

14. $Z = -1 + i\sqrt{3}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සලකන්න.
(i) $|Z|$ හා $Arg(Z)$ සොයන්න.
(ii) Z^2 හා $a+ib$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$
(iii) $Z^2 + pz$ තාත්ත්වික වනසේ p තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවේ අගයන් සොයන්න.
(iv) $Arg(z^2 + qz) = \frac{5\pi}{6}$ වනසේ වු q තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවේ අගය සොයන්න.

15. $Z_1 = 1,\ Z_2 = \cos\theta + i\sin\theta (0 < \theta < \pi)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක සලකන්න. Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක ආගන්නුඩ් සටහනේ පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරන්න. $Z_1 + Z_2$ හා $Z_2 - Z_1$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන පිළිවෙළින් C හා D ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. ඔබේ සටහන භාවිතයෙන්
(i) $|Z_1 + Z_2|$ හා $Arg(Z_1 + Z_2)$ (ii) $|Z_2 - Z_1|$ හා $Arg(Z_2 - Z_1)$ සොයන්න.

$|Z_1 + Z_2|^2$ ූ $|Z_2 - Z_1|^2$ θ ගෙන් ස්වායත්ත බව අපෝහනය කරන්න.

16. (*a*) $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ හි අගය සොයන්න.

(*b*) $\sin y = x \sin(y + a)$ නම්

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(y + a)}{\sin a}$ බව පෙන්වන්න.

17. (*a*) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ සොයන්න.

(*b*) $y = x^n lnx$ නම්

x හි සියලු අගය සඳහා $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 3x^2$ වන පරිදි nහි අගය සොයන්න.

18. $x = t + \ln t$ හා $y = t - \ln t$ $(t > 0)$ නම්

(i) $\frac{dy}{dx}$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ t පදවලින් සොයන්න.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8(x + y)}{(x + y + 2)^3}$ බව ද පෙන්වන්න.

19. $\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{(1 + x)^2}$ සුළු කරන්න.

එනයින් $\int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2)(1 + x)^2}$ සොයන්න.

20. $x = 2(1 + \cos^2 \theta)$ ආදේශය භාවිතයෙන්

$\int_2^3 \sqrt{\frac{x - 2}{4 - x}} dx$ අගයන්න.

21. කොටස් මඟින් අනුකලනය භාවිතයෙන්

$\int e^{4x}.\cos 3x.dx$ සොයන්න.

22. $3x + 2y = 24$ සරල රේඛාව y අක්ෂය A හි දී ද x අක්ෂය Bහි දී ද හමුවේ. ABහි ලම්බ සමච්ඡේදකය (0, -1) හරහා x අක්ෂයට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවට C හි දී හමු වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

23. සමචතුරස්‍රයක පාදයක සමීකරණය $x-2y=0$ යි. එය සමචතුරස්‍රයේ විකර්ණය $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ හි දී ඡේදනය කරයි. සමචතුරස්‍රයේ ඉතිරි පාදවල සමීකරණ සොයන්න.

24. ABC යනු AB = AC හා A $\equiv$ (0, 8) වන ත්‍රිකෝණයකි. පිළිවෙලින් B හා C හරහා $x+3y=14$ හා $3x-y=2$ ගමන් කරයි. ABC ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ සොයන්න.

25. $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ සරල රේඛාව $x^2+y^2-a^2=0$ වෘත්තය A හි දී හා B හි දී ඡේදනය කරයි. AB විකර්ණය වන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

26. S යනු $S \equiv x^2+y^2-4x-2y+4=0$ මඟින් දෙනු ලබන වෘත්තයයි. P යනු $P \equiv (4,2)$ ලක්ෂ්‍ය යි.
    (i) P ලක්ෂ්‍යය S වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.
    (ii) P සිට S තෙක් ඇදි ස්පර්ශකවල දිග සොයන්න.
    (iii) P සිට S තෙක් ඇදි ස්පර්ශකවල සමීකරණ සොයන්න.

27. y අක්ෂය ස්පර්ශ කරන x අක්ෂය මත ඒකක 3ක අන්තඃ ඛණ්ඩයක් සෑදෙන සියලු ම වෘත්තවල සාධාරණ සමිකරණය සොයන්න. ඒවායේ කේන්ද්‍ර $4x^2-4y^2=9$ සමීකරණය මඟින් දෙනු ලබන වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

28. $\cos 6\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$ විසඳන්න. මෙහි $0<\theta<\pi$

29. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

30. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන් $(b+c-a)(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{c}{2}) = 2a\cot\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

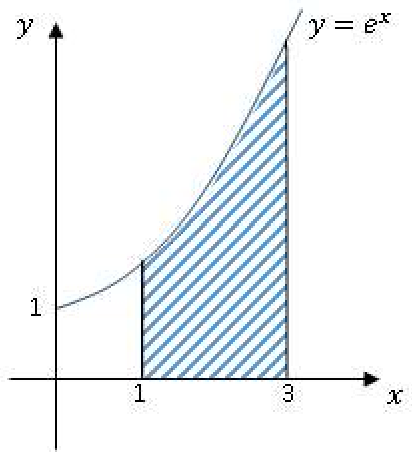
31. ද මුවාර් ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කරන්න. එම ප්‍රමේය භාවිතයෙන් $(1+\sqrt{3}i)^7$

32. ද මුවාර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන් සාධනය කරන්න.
    (i) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - \cos\theta$
    (ii) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

33. වක්‍රයක පරාමිතික සමීකරණය $x=t(1-t)^2$ හා $y=t^2(1-t)$ මෙමගින් t යනු තාත්වික පරාමිතියකි. $t \neq 1, \frac{1}{3}$ වන විට $\left[t(1-t)^2,\ t^2(1-t)\right]$ ලක්ෂයේ දී අනුක්‍රමණය $\frac{t(2-3t)}{(1-t)(1-3t)}$ බව පෙන්වන්න. $t=\frac{1}{2}$ වන විට එම ලක්ෂයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

34. $y=x(x-3)$ සහ x අක්ෂයෙන් වට වූ ප්‍රදේශයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

35.



(i) අඳුරු කර ඇති කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) එම අඳුරු කර ඇති කොටස x අක්ෂ වටා භ්‍රමණය කිරීමෙන් සෑදෙන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

B කොටස

1. (*a*) $x^2 + px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ.

   (i) මූලවල වෙනස $2\sqrt{3}$ බව හා මූලවල පරස්පරයන්ගේ එකතුව 4 බව දී ඇත. p හා q ගත හැකි අගය සොයන්න.

   (ii) p හා q ඇසුරින් සංගුණක දක්වමින්, මූල $\alpha + \dfrac{2}{\beta}$ හා $\beta + \dfrac{2}{\alpha}$ වන සමීකරණය සොයන්න.

   (*b*) තාත්ත්වික x සඳහා $\dfrac{x^2+3x-4}{5x-k}$ ට සියලු අගය ගත හැකි වන සේ kට ගත හැකි අගය සොයන්න. $k=-5$ විට $y = \dfrac{x^2+3x-4}{5x-k}$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

2. (*a*) $f(x) = \lambda^2(x^2 - x) + 2\lambda x + 3 = 0$ $(\lambda \neq 0)$ වර්ග සමීකරණයේ මූල α හා β වේ. $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{4}{3}$ සම්බන්ධතාව අනුව α හා β සම්බන්ධ කරන λ හි අගයන් λ_1, λ_2 වන්නේ නම් $\dfrac{\lambda_1^{\,2}}{\lambda_2}$ හා $\dfrac{\lambda_2^{\,2}}{\lambda_1}$ මූල වන සමීකරණය සොයන්න. සියලු x අගය සඳහා $f(x) > 2\lambda x$ වන සේ λ ට තිබිය හැකි විශාලතම පූර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

   (*b*) ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් $\displaystyle\sum_{r=1}^{2n} (-1)^{r+1}\frac{1}{r} = \sum_{r=n+1}^{2n} \frac{1}{r}$ බව පෙන්වන්න.

3. (*a*) $\dfrac{2r+3}{r(r+1)}$ භින්න භාගවලින් ප්‍රකාශ කරන්න.

   $\dfrac{5}{1.2}\left(\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{7}{2.3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{9}{3.4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \ldots$ ශ්‍රේණියේ n වන පදය Un ලියන්න.

   $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන සේ වූ V_r සොයන්න. ඒනයින් $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ සොයන්න.

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\alpha} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර තහවුරු කරන්න.

   (b) $y = |2x-1|$ සහ $y = |x+1| + 1$ ශ්‍රිත එකම රූප සටහනක අඳින්න. ඒමගින් $|2x-1| - |x+1| \geq 1$.විසඳන්න.

4. (*a*) පිරිමි ළමයි සදෙනෙක් හා ගැහැණු ළමයි සදෙනෙක් පේළියක අහඹු ලෙස අසුන් ගනි.

(i) ගැහැනු ළමයි හ දෙනා එකට අසුන් ගනි.

(ii) පිරිමි ළමයි හා ගැහැනු ළමයි මාරුවෙන් මාරුවට අසුන් ගනි. යන අවස්ථා වල අසුන් ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8 සංඛ්‍යාංකවලින් තෝරාගත් සඛ්‍යාංක හතරක සංඛ්‍යා ගොඩ නඟයි.

(i) සංඛ්‍යාව තුළ එක සංඛ්‍යාංකවලට පුනරාවර්ත විය.

(ii) සංඛ්‍යාව තුළ එක සංඛ්‍යාංකයක් භාවිත කළ හැක්කේ එක් වරක් පමණක් නම් කොපමණ සංඛ්‍යා ගොඩනැගිය හැකි ද?

(ii) අවස්ථාවේ කොපමණ සංඛ්‍යා ගණනක් 5000ටවැඩි හා දෙකෙන් බෙදේ ද?

(c) ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් සඳහා $(1+x)^n$ හා $(x+1)^n$ ද්වි පද ප්‍රසාරණ ලියා දක්වන්න. ප්‍රසාරණ 2හි ම පළමු ව්‍යුත්පන්නය සැලකීමෙන්

(i) $$1(n-1)\,{}^nC_1^{\,2} + 2(n-2)\,{}^nC_2^{\,2} + \ldots + r.(n-r).{}^nC_n^{\,2} + \ldots + (n-1).1.{}^nC_{n-1}^{\,2} = n^2.{}^{2n-2}C_{n-2}$$

(ii) $\sum\limits_{r=1}^{n} r.{}^nC_r \,.\sum\limits_{r=0}^{n-1} (n-1).{}^nC_r = n^2.2^{2n-2}$ බව පෙන්වන්න.

5. (*a*) $Z^3 = 1$හි මූල තුන සොයන්න.
$Z^3 = 1$හි එක සංකීර්ණ මූලයක් ωයයි දී ඇත. $1+\omega+\omega^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.
එනයින්

(i) $\dfrac{\omega}{\omega+1} = -\dfrac{1}{\omega}$

(ii) $\dfrac{\omega^2}{\omega^2+1} = -\omega$

(iii) $\left(\dfrac{\omega}{\omega+1}\right)^{3k} + \left(\dfrac{\omega^2}{\omega^2+1}\right)^{3k} = -2,$ k ඔත්තේ වේ.

$= +\,2,$ k ඉරට්ටේ වේ. බව පෙන්වන්න.

(b) $u = 2i$ හා $v = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක සලකන්න. u, v, uv, $\dfrac{u}{v}$, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ මෙහි ආකාරයට ලියන්න. $(-\pi < \theta \le \pi)$

ආගන්ඩ් සටහනේ u, uv හා $\dfrac{u}{v}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.

6. (*a*) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1}$, $p+iq$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $p,q\in\mathbb{R}$; හා n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

1 හි ඝන මූල $1,\omega,\omega^2$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ වේ.

එනයින් $(x+2)^3=1$ සමීකරණය විසඳන්න.

(i) $\left(2+5\omega+2\omega^2\right)^6=729$

(ii) $(p-q)(p\omega-q)\left(p\omega^2-q\right)=p^3-q^3$

(iii) $\left(\dfrac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}\right)=\omega$ බවද පෙන්වන්න.

(b) ආගන්ඩ් සටහනේ $P(x,y)$ ලක්ෂය $Z=x+iy$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. මෙහි $x,y\in\mathbb{R}$

$|Z-3-3i|=2$ බව දී ඇත. Pහි පථය සොයන්න. ආගන්ඩ් සටහනේ දළ සටහනක් අදින්න.

තව ද $0\le A\text{rg}(Z-3-3i)\le\dfrac{\pi}{3}$ වන්නේ නම් මෙම අවශ්‍යතා 2 ම සපුරාලන ආගන්ඩ් සටහනේ ප්‍රදේශය අඳුරු කර දක්වන්න. මෙම ප්‍රදේශයේ $|Z|$ විශාලතම අගය සොයන්න.

7. (*a*) (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^2 x}{x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-2\sin x}{x^3}$ සොයන්න.

(*b*) $y=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $Z=\sec^{-1}x\left(x>\sqrt{2}\right)$ යයි දී ඇත.

(i) $\cos y.\dfrac{dy}{dz}=-\cos ec^2 z$

(ii) $\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)}}=0$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) කම්බියක් සම ද්විපාද ත්‍රිකෝණයක හැඩයට නමා ඇත. ත්‍රිකෝණය අන්තර්ගත කරන වර්ගඵලය උපරිම වන්නේ එය සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන විට බව පෙන්වා එම උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න.

8. (*a*) $f(x) = \sin 2x$ නම් ප්‍රථම මූලධර්මවලින් $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right] = 2\cos 2x$ බව පෙන්වන්න.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\sin 2x\right) = 2^n \sin\left[\dfrac{n\pi}{2} - 2x\right]$

බව පෙන්වන්න.

(*b*) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ මෙහි $x \neq 0, 2$

$f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. පළමු අවකලනය භාවිතයෙන් පමණක් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ස්පර්ශෝන්මුඛ හා උපරිම හෝ අවම හෝ (ඇත්නම්) දක්වමින් අඳින්න. එනයින්,

(i) $y = \left|f(x)\right|$

(ii) $y = \dfrac{1}{f(x)}$ යන ප්‍රස්තාරවල ද දළ සටහනක් අඳින්න.

9. (*a*) $\dfrac{1}{\left(1 - x^2\right)\left(x^2 + 1\right)}$ භින්න භාගවලින් ප්‍රකාශ කරන්න.

එනයින් $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1 - x^2\right)\left(x^2 + 1\right)}$ සොයන්න.

(*b*) $\sin x - \cos x = t$ යයි දී ඇත. $\sin 2x$ t පදවලින් ප්‍රකාශ කරන්න.

ඉහත ආදේශය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x}dx$ අගයන්න.

(*c*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx$

(i) $aI + bJ$ සොයන්න.

(ii) I හා J හි තවත් ඒකජ සම්බන්ධතාවක් ලබාගෙන I හා J හි අගයන් සොයන්න.

10. (a) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ බව සාධනය කරන්න.

$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(b) කොටස් මඟින් අනුකලනය භාවිතයෙන්

$\int \frac{x.e^x}{(1+x)^2}dx$ සොයන්න.

(c) $y = x$ රේඛාවෙන් හා $y = x(2-x)$ වක්‍රයෙන් සපර්යන්ත වර්ගඵලය සොයන්න.

11. (a) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රය මුළුමනින් ම පළමු වෘත්ත පාදයේ පිහිටා ඇත. ADහි සමීකරණය $x + y - 4 = 0$ හා AC සමීකරණය $3x - y - 8 = 0$ වේ.

ABහි දිග $2\sqrt{2}$ වේ.

(i) ABහි සමීකරණය සොයන්න.

(ii) Bහි ඛංඩාංක සොයන්න.

(iii) BD, $x - 3y + 7 = 0$ සමාන්තර නම් BC හා CDහි සමීකරණ සොයන්න.

(b) (2, 0) හා (0, -1) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S=0 වෘත්තයේ සාධාරණ සමීකරණය

$S \equiv x^2 + y^2 - \left(\frac{\lambda+4)}{2}\right)x + (\lambda+1)y + \lambda = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ පරාමිතියකි.

එනයින්

(i) (1, -1), (2, 0) හා (0, -1) ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $S_1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

(ii) $S_1 = 0$ මඟින් නිරූපණය කරන පද්ධතියේ $S_2 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය $S_1 = 0$ මඟින් සමච්ඡේදනය කරයි නම් $S_2 = 0$ හි සමීකරණය සොයන්න.

(iii) $S = 0$ මඟින් නිරූපණය කරන පද්ධතියේ වෘත්ත 2ක් එකිනෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරයි නම් $\lambda_1\lambda_2 = -4$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ_1 හා λ_2 යනු වෘත්තවලට අනුරූප පරාමිති වේ.

12. (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයේ C කෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය $x-4y+10=0$ හා B හරහා යන මධ්‍යස්ථය $6x+10y-59=0$ වේ. Aහි ඛණ්ඩාංකය (3, -1) වේ.

(i) Bහි හා Cහි ඛණ්ඩාංක

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ

(iii) B හරහා AC ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $S_3=0$ වෘත්තය $S_1 \equiv 3x^2+3y^2-6x-1=0$, $S_2 \equiv x^2+y^2+2x-4y+1=0$ වෘත්ත 2හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යමින් $S_1=0$ කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරයි. $S_3=0$ හි සමීකරණය සොයන්න. $S_3=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත එකිනෙක ප්‍රලම්බව සමච්ඡේදනය කරන බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$S_1=0$ හි කේන්ද්‍රය දී $S_3=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

13. (*a*) පහත සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(i) $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$

(ii) $2\tan x+\sec 2x=2\tan 2x$

(b) $2\cos^2\theta-2\cos^2 2\theta=\cos 2\theta-\cos 4\theta$ බව සාධනය කර $\cos 36^0-\cos 72^0=\dfrac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න. එනයින් $\cos 36^0$ හා $\cos 72^0$ හි අගයන් සොයන්න.

(c) සම්මත අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සම්මත අංකනයෙන්

(i) $\dfrac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\dfrac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\dfrac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $A=45^0$ හා $B=75^0$ නම් $a+\sqrt{2}c=2b$ බව පෙන්වන්න.

14. (*a*) (i) $2(\cos x+\cos 2x)+\sin 2x(1+\cos x)=2\sin x$ විසඳන්න.
$-\pi<x\le\pi$ වේ.

(ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$

මෙහි $(2<x<4)$ සමීකරණ විසඳන්න.

(*b*) $(1+m)\sin(\theta+\alpha)=(1-m)\cos(\theta-\alpha)$ නම්

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=m\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) සම්මත අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් නියමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයෙහි AH, BCට ලම්බක AH=Pවේ

$(b+c)^2 = a^2 + 2ap\cot\dfrac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2+b^2)$ නම් $C = 45^0$ හෝ 135^0 බව සාධනය කරන්න.

15. (*a*) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2×2 න්‍යාසයක් යයි සිතමු.

$A^2 - 5A + 7I = 0$ බව පෙන්වන්න, I යනු දෙවන ගණයේ ඒකක න්‍යාසය යි. එනයින් A^{-1} සොයන්න. තව ද දෙවන ගණයේ B න්‍යාසය BA=C වන පරිදි වේ නම් මෙහි B සොයන්න.

$C = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$

(*b*) $x - y = a$ සහ $x + y = b$ සමීකරණ මගින් x සහ y සම්බන්ධ වී ඇත. A, X, B න්‍යාස විට, මෙම සමීකරණය $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.
A^{-1} සොයන්න.

එයින් a, b ඇසුරෙන් සොයන්න. $\mathrm{A}^2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathrm{B}$ ලෙස දී ඇත. සෙවීමෙන් $\left(\mathrm{A}^2\right)^{-1}$ තොරව, න්‍යාස පමණක් භාවිත කර a සහ b ඇසුරෙන් p, q සොයන්න.

සංයුක්ත ගණිතය II

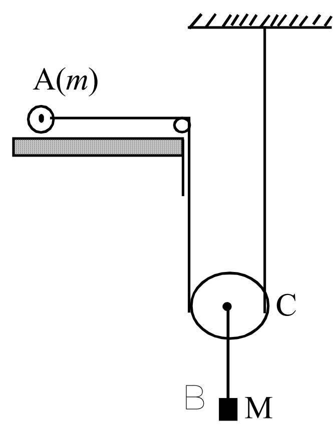
A කොටස

1. එකිනෙකට 10kmක් ඇතින් පිහිටි A හා B නම් දුම්රිය ස්ථාන දෙකක් අතර දුම්රියක් ධාවනය වේ. එය u ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් A සිට ගමන අරඹා මුල් තත්පර 40ක් තුළ $1ms^{-2}$ ඒකාකාර ත්වරණයකින් ගමන් කර වේගය $60\ ms^{-1}$ට ළඟා වේ. ඊළඟ තත්පර T තුළ එම වේගය පවත්වා ගෙන ඉන් අනතුරු ව $\frac{1}{2}ms^{-2}$ ඒකාකර මන්දනයෙන් ගමන් කර B හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණේ.
   (i) දුම්රියේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න.
   (ii) ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් u සහ T සොයන්න.

2. A නම් අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. A එහි ඉහළ ම පිහිටීමට ළඟා වන විට වෙනත් B නම් අංශුවක් $2u$ ප්‍රවේගයෙන් එම ස්ථානයෙන් ම සිරස් ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ.
   (i) එක ම රූප සටහනේ A හා B අංශුවල චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර අඳින්න.
   (ii) B ප්‍රක්ෂේපණය කළ මොහොතේ සිට අංශු දෙක හමු වීමට ගත වන කාලය සොයන්න.

3. එක් නැවක් $2u\ kmh^{-1}$ වේගයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට ගමන් කරන අතර දෙවන නැවක් දකුණින් 30^0 නැගෙනහිර දිශාවට $u\ kmh^{-1}$ වේගයෙන් ගමන් කරයි. දවල් 12.00ට පළමු වන නැව දෙවන නැවේ සිට කිලෝමීටර $d\ km$ දුරින් දකුණු දිශාවේ දිස් වේ.
   (i) B ට සාපේක්ෂ ව A හි ප්‍රවේගය සොයන්න.
   (ii) නැව් දෙක අතර ඇති වන අඩු ම දුර සහ ඒ සඳහා ගත වන කාලය නිර්ණය කරන්න.

4. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි සුමට තිරස් මේසයක් මත නිශ්චල ව ඇති ස්කන්ධය m වූ A අංශුවක්, මේස දාරයේ වූ අචල සුමට කප්පියක් මතින් ද ලුහු සුමට C කප්පියක් යටින් ද යවා, සීලිමේ වූ අචල ලක්ෂයකට ගැට ගැසූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට ඈඳා ඇත. C කප්පිය ස්කන්ධය M වූ B අංශුවක් දරයි. පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙන් මුදා හළ පසු ව C කප්පියේ ත්වරණයත්, තන්තුවේ ආතතියත් සොයන්න.



5. තත්පර t කාලයේ දී අංශුවක පිහිටුම් දෛශිකය වන $\underline{r}$ යන්න $\underline{r} = a\cos nt\,\underline{i} + b\sin nt\underline{j}$ යන්නෙන් දෙනු ලැබෙයි. $a, b, (a \neq b)$ සහ n යනු නියත වේ $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ යනු Ox, Oy ඔස්සේ ඒකජ දෛශික ද වේ. ප්‍රවේග දෛශිකය $\underline{v}$ සහ ත්වරණ දෛශිකය $\underline{a}$ සොයන්න. එයින් ප්‍රවේග දෛශිකය ත්වරණ දෛශිකයට ලම්බක වන කාලය සොයන්න. $\underline{v}.\underline{v}. = n^2\left(a^2 + b^2 - \underline{r}.\underline{r}\right)$

6. ස්කන්ධය $1200\,kg$ වන මෝටර් රථයක $24\,kmh^{-1}$ක නියත ප්‍රවේගයෙන් තිරස් මාර්ගයක ගමන් කරයි. රථයේ චලිතයට එරෙහි ප්‍රතිරෝධය $600N$ වේ.
   (i) රථයේ එන්ජිමේ ජවය කිලෝවොට්වලින් සොයන්න.
   (ii) ඉන් පසු රථය තිරසට α ආනතියක් ඇති කන්දක ඉහළට ගමන් කරයි. මෙහි $\sin\alpha = \dfrac{1}{24}$ ද ගුරුත්වාකර්ෂණ බලය හැර $600N$ නියත ප්‍රතිරෝධයක් චලිතයට එරෙහි ව ක්‍රියා කරයි. එන්ජිම $30\ kW$ ජවයෙන් ක්‍රියා කරන්නේ නම් මෝටර් රථයේ ප්‍රවේගය
   $20\ ms^{-1}$ වන විට එහි ත්වරණය ගණනය කරන්න.

7. තත්පරයක් තුළ $0.1m^3$ ජලය පිට කළ හැකි හරස්කඩ වර්ගඵලය $100\ cm^2$ වූ නළයකින් ජලය පිට වන ප්‍රවේගය $10\,ms^{-1}$ බව පෙන්වන්න. මෙම නළය තුළින් $12m$ උසකට ජලය ඔසවා $10\ ms^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ජලය පිට කරන එන්ජිමක ජවය ගණනය කරන්න. (ඝර්ෂණය නොසලකා හරින්න.)

8. ස්කන්ධය M වූ තුවක්කුවක් සුමට පීලි මත ස්ථානගත කර ඇත. එහි වෙඩි තබන දිශාව පීලි ඔස්සේ වෙයි. තුවක්කුවට සාපේක්ෂ ව v ප්‍රවේගයකින් ස්කන්ධය m වූ උණ්ඩයක් පිට කරන ලදි. තුවක්කුවේ ආරෝහණ කෝණය α නම් උණ්ඩයේ ආරම්භක චලන දිශාව තිරසට $\tan^{-1}\left[\dfrac{M+m}{M}\tan\alpha\right]$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

9. පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m, $2m$, සහ $3m$ වූ A, B හා C අංශු තුනක් තිරස් මේසයක් මත එම පිළිවෙළට ම තබා ඇත. අනුයාත අංශු දෙකක් අතර දුර a වේ. දිග $2a$ වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා B ගැට ගසා ඇත. මෙවැනි ම තවත් තන්තුවකින් B හා C යා කර ඇත. A අංශුව CBA දිශාවට v ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරන ලදි. C චලනය අරඹන ප්‍රවේගය ගණනය කරන්න. C ගැස්සීමකින් යුක්ත ව චලනය වීම අරඹන මොහොතේ තන්තුවල BC හා AB ඇති වන ආවේගී ආතති අතර අනුපාතය $3:1$. බව පෙන්වන්න. තව ද C චලනය වීමට පටන් ගත් පසු හානි වන මුළු ශක්තිය සොයන්න.

10. පිළිවෙළින් ස්කන්ධ m සහ $4m$ වූ A සහ B නම් ඒකාකාර කුඩා සුමට ගෝල දෙකක් පිළිවෙළින් $2u$ සහ $6u$ ප්‍රවේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ගෝල අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\dfrac{1}{2}$ වේ.
   (i) ගැටුමෙන් පසු Bහි ප්‍රවේගය ගණනය කරන්න.
   (ii) එක් ගෝලයකින් අනෙකට සංක්‍රමණය වූ ගම්‍යතාව ගණනය කරන්න.

11. පිළිවෙළින් ස්කන්ධ m හා $4m$ වූ A හා B අංශු දෙකක් තිරස් සුමට මේසයක් මත චලිතයට නිදහස් ව ඇත. පළමු ව A, u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වී නිශ්චලතාවේ ඇති B සමඟ සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු Aහි දිශාව ප්‍රතිවර්ත වේ. අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. ගැටුම සිදු වූ වහා ම A හා B අංශුවල ප්‍රවේග සඳහා ප්‍රකාශන ලබා ගන්න. අනතුරු j we; sj k p, ș f h aB සිරස් සුමට බිත්තියක ගැටී පොළා පනියි. බිත්තිය B හි චලිතයට ලම්බක වේ. B හා බිත්තිය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{4}{5}$ වේ. A හා B අතර දෙවන ගැටුමක් ඇති වෙයි නම් $\frac{1}{4} < e < \frac{9}{16}$ බව පෙන්වන්න.

12. සිරස් කන්දක උස $73.5m$ වේ. A හා B ගල්කැට දෙකක්, කන්ද මුදුනේ සිට තිරස්ව $28ms^{-1.}$ ප්‍රවේගයෙන් A ගල් කැටය ද ඒ මොහොතේ ම කන්ද පාමුල සිට තිරසට α ආරෝහණයකින් යුක්ත ව $35\ ms^{-1.}$ ප්‍රවේගයෙන් B ගල් කැටය ද ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. ගල් කැට දෙක එකම සිරස් තලයේ නිදහසේ චලනය වෙමින් ගුවනේ දී ගැටෙයි. ගල් කැට දෙකේ තිරස් චලිතය සලකමින්

(i) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ගල් කැට ප්‍රක්ෂේප කළ මොහොතේ සිට ඒවා ගැටෙන මොහොත දක්වා වූ කාලය ගණනය කරන්න ($g = 9.8ms^{-2}$ ලෙස ගන්න.)

13 ප්‍රක්ෂිප්තයක් ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයේ සිට a තිරස් දුරකින් ද $\frac{a}{2}$ සිරස් උසකින් ද පතිත වන පරිදි $\sqrt{2ag}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරන ලදි. විය හැකි ප්‍රක්ෂේපණ කෝණ ගණනය කරන්න. මෙම ගමන් මාර්ග දෙක ඔස්සේ චලිතයට ගත වන කාලය අතර අනුපාතය සොයන්න.

14. දිග a ද ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය 2mg ද වූ AB නම් තන්තුවක A කෙළවරක අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. B කෙළවරෙහි ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ගැට ගසා $\sqrt{\frac{3g}{4a}}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් තිරස් වෘත්තයක් ගෙවා යාමට සලස්වා ඇත. තන්තුවේ විතතියත් තන්තුව සහ තිරස අතර කෝණයේ කෝසයිනයත් සොයන්න.

15. සිරස් තලයක සවි කර ඇති අරය $0.6m$, වන සුමට වළල්ලක ස්කන්ධය 2kg වන සුමට පබළුවක් රඳවා එය වළල්ල දිගේ නිදහසේ චලනය වන පරිදි තබා ඇත. පබළුව වළල්ලේ ඉහළ ලක්ෂයේ තබා අත හැරිය විට පහළ ම ලක්ෂයට පැමිණි විට වේගය සොයන්න. තව ද පබළුව හා වළල්ල අතර ප්‍රතික්‍රියාව ශුන්‍ය වන ලක්ෂයට වළල්ලේ කේන්ද්‍රය හරහා යන මට්ටමේ සිට ඇති උස සොයන්න. ($g = 10ms^{-2}$)

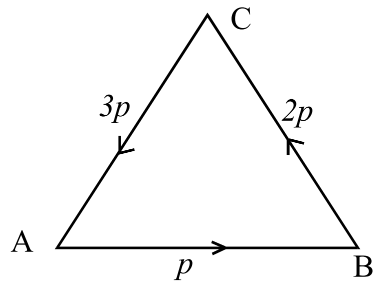
16. අංශුවක් සරල රේඛාවක් මත සරල අනුවර්ති චලිතයක යෙදෙයි. කේන්ද්‍රයේ සිට අංශුව $1.2m$ සහ $0.9m$ දුරින් පිහිටන විට අංශුවේ ප්‍රවේග පිළිවෙළින් $0.9ms^{-1}$ සහ $1.2ms^{-1}$ වේ. අංශුවේ විස්තරය සහ දෝලන කාලාවර්තය සොයන්න.

17. m ස්කන්ධය ඇති අංශුවක් ස්වාභාවික දිග a සහ ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය $2mg$ වන ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට සම්බන්ධ කර තන්තුවේ දෙකෙළවර එකිනෙකට $2a$ දුරින් පිහිටි සිරස් රේඛාවක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සම්බන්ධ කර සමතුලිතතාව් තබා ඇත. සමතුලිතතාව් තන්තු කොටස් දෙක ම ඇදී පවතී නම් සහ අංශුවට කුඩා විස්ථාපනයක් දුන් විට අංශුව සරල අනුවර්ති චලිතයේ යෙදෙයි නම් අංශුවේ දෝලන කාලාවර්තය සොයන්න.

18. ABC යනු පාදයක දිග $2a$ වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. $p, 2p$ හා $3p$ යන බල පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ හා $\overrightarrow{CA}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

(i) බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව නිර්ණය කරන්න.

(ii) සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව දික් කළ BA ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර නිර්ණය කරන්න.



19. ABCD යනු ඍජුකෝණාස්‍රයකි. $AB = 4a,$ හා $BC = 3a$. වේ. $2p, 4p, 6p, 7p$ හා $5p$ යන බල පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ හා $\overrightarrow{AC}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න. $\overrightarrow{BC}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බලය ඉවත් කළ විට නව බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය, දිශාව සහ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

20. දිග $2a$ ද ස්කන්ධය w ද වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A, අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර ඇත. Bහි ක්‍රියා කරන විශාලත්වය P වූ බලයක් මඟින් යටි සිරස සමඟ $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ කෝණයක් සාදමින් මෙම දණ්ඩ සමතුලිතතාව් තබා ඇත. බල ත්‍රිකෝණය උපයෝගී කර ගනිමින්

(i) Pහි බලය තිරස් ව ඇති විට Pහි විශාලත්වය සොයන්න.

(ii) Pහි අවම අගය සහ එවිට එහි දිශාව සොයන්න.

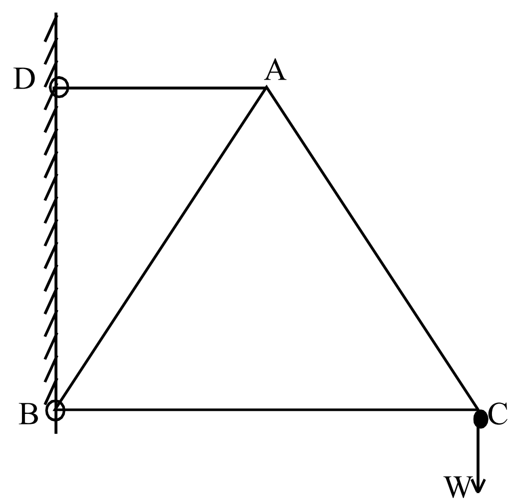
21. අරය $9cm$ ද ස්කන්ධය W ද වන ගෝලයක් තිරසට 30^0 කින් ආනත සුමට තලයක් මත සමතුලිතතාව් පවතියි. මෙම ගෝලයේ මතුපිට ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇති තන්තුවක අනෙක් කෙළවර ගෝලයේ හා තලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $12cm$ක් ඇතින් ආනත තලයේ වූ ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. ගෝලය මත ක්‍රියා කරන බල ලකුණු කරන්න. ගෝලයේ සමතුලිතතාව සඳහා බල ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න. එමඟින්

(i) තන්තුවේ ආතතිය

(ii) තලයෙන් ගෝලයට ඇති වන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

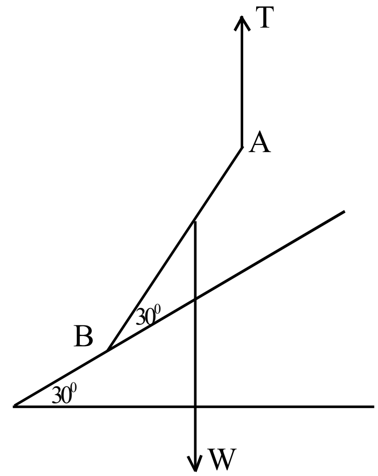
22. දික a ද බර w ද වන AB, BC හා CA සමාන ඒකාකර දඬු තුනක් සුමට ව සන්ධි කර ABC ත්‍රිකෝණය සාදා ඇත. මෙම රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක් මත AC තිරස් ව සිටින පරිදි Aහි හා C හි දී සුමට ආධාරක දෙකක් මත රඳවා ඇත. AC ට ඉහළින් B පිහිටා ඇත. බර W වූ ස්කන්ධයක් AB මත වූ D ලක්ෂ්‍යයේ දී ගැට ගසා ඇත. මෙහි $AD = \frac{a}{3}$ වේ. B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

23. රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි සැහැල්ලු දඬු හතරකින් සමන්විත වේ. $AB = BC = CA = 2a$, සහ $AD = a$ ද වේ. මෙය සිරස් බිත්තිය මත වූ B හා D ලක්ෂ්‍යවලට සුමට ව අසවු කර ඇත. C හි දි W බරක් එල්ලා ඇත. BC තිරස් වේ. බෝ අංකනය උපයෝගී කරමින් ප්‍රත්‍යබල සටහන් ඇඳ එනයින් එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යබලය සොයන්න.



24 තිරසට α කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය m වන අංශුවක් මත P බලයක් තලයට සමාන්තර ව ඉහළට යොදා ඇත්තේ අංශුව පහළට ලිස්සීමට ආසන්න වන ලෙස පවතින පරිදි ය. අංශුව පහළට ලිස්සන විට 3P බලයක් එම අංශුවට තලයට සමාන්තර ව ඉහළට යෙදූ විට අංශුව ඉහළට චලිත වීමට සැරසේ නම් සහ μ යනු තලය හා අංශුව අතර සර්ෂණ සංගුණකය නම් $2\mu = \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

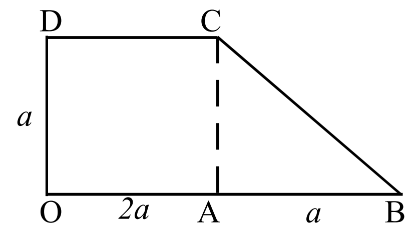
25. බර W වන ඒකාකාර AB දණ්ඩක් සිරස් තලයක සමතුලිතතාව ඇත්තේ රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ය. සිරස් ලණුවක් A ලක්ෂ්‍යයට සම්බන්ධ කර ඇත.



(i) W ඇසුරෙන් T අගය සොයන්න.

(ii) සමතුලිතතාව සඳහා μ හි කුඩාතම අගය සොයන්න. (μ යනු Bහි දී ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.)

26. ඒකාකාර OABCD ආස්තරයක් OACD ඍජුකෝණාස්‍රයකින් ද ABC ත්‍රිකෝණයකින් ද සමන්විත වේ.



OA = 2a, OD = a, AB = a නම්

(i) ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට, OB හා OD සිට ඇති දුර සොයන්න.

(ii) ආස්තරය O ගෙන් එල්ලා ඇති විට OAB තිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

27. A හා B යනු සිද්ධි දෙකක් නම් $P(B') = \dfrac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \dfrac{5}{8}$ සහ $P(A|B) = \dfrac{3}{4}$.

$P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A)$ සහ $P(A' \cup B')$ සොයන්න.

28. (a) A හා B යනු $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ ලෙස ඇති එකක් අනෙකින් ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකකි. A හා B ස්වායත්ත නම්

(i) $P(A \cup B)$

(ii) $P(A' \cap B')$ සොයන්න.

(b) යන්ත්‍රයක් මඟින් නිෂ්පාදනය කරන විදුලි බල්බවලින් 20% ක් දෝෂ සහිත වෙයි. එවැනි බල්බ තොගයකින් තෝරාගත් බල්බ 4කින් 3ක් නරක් වී තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

29. ළමයින් 9 දෙනෙකු ලබාගත් ලකුණු පහත දක්වා ඇත.

7, 11, 5, 8, 13, 12, 11, 9, 14

ලකුණුවල

(i) මධ්‍යන්‍යය

(ii) මධ්‍යස්ථය

(iii) සම්මත අපගමනය

(iv) කුටිකතා සංගුණකය ගණනය කරන්න.

30. හෝටලයක නවාතැන් ගත් කිහිප දෙනෙකුගේ වයස් පිළිබඳ තොරතුරක් පහත වෘත්ත පත්‍ර සටහනෙහි දැක්වේ.

0	2											(01)
1	1	5	7	9								(04)
2	1	3	8	9								(04)
3	2	3	3	5	6	6	7	9	9	9	9	(11)
4	0	5	7	7	8	9						(06)
5	8											(01)

2/3 යනු අවුරුදු 23 යි

(i) ඉහත වයස්වල උපරිමය, අවමය සහ මාතය සොයන්න.

(ii) Q_1, (පළමු වන - චතුර්ථකය), Q_3 (තුන් වන චතුර්ථකය) සහ මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

(iii) පිටත පිහිටීම් $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$ හා $Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$ මගින් දක්වයි නම් පිටත පිහිටීම් කිසිවක් ඇත් දැයි විමසන්න.

B කොටස

(01) (a) නිශ්චලතාවයේ සිට ගමන් අරඹන P නම් අංශුවක් a ඒකාකාර ත්වරණයකින් සරල රේඛාවක් දිගේ ගමන් කරයි. තත්පර t කාලයකට පසු තවත් Q අංශුවක් එම ලක්ෂ්‍යයේ සිට u ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් ගමන අරඹා $\frac{3a}{2}$ ඒකාකාර ත්වරණයකින් චලනය වේ. P හා Q අංශු දෙක එක ම දිශාවේ චලනය වී එක ම වේලාවේ එකම උපරිම වේගයක් ලබා ගනී. උපරිම වේග ලබාගත් විගස P හා Q අංශු පිළිවෙළින් a හා $2a$ ඒකාකාර මන්දනවලින් චලිත වී නිසල වේ. එක ම රූප සටහනක P හා Q සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර අඳින්න.

එමඟින්

(i) උපරිම වේගය $3at-2u$ බව පෙන්වන්න.

(ii) සමස්ත චලිතයේ අංශු දෙක ගමන් කළ කාල පරතරය $\frac{5t}{2}-\frac{u}{a}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) එක් එක් අංශුව ගමන් කළ දුර සොයන්න.

(b) OA හා OB සරල රේඛීය මාර්ග දෙකක් α සුළු කෝණයකින් ඡේදනය වේ. P රථයක් O සිට OA දිශාවට u ඒකාකාර වේගයෙන් චලනය වන අතර, දෙවන Q රථයක් OB දිශාවට V ඒකාකාර වේගයෙන් චලිතය වේ. $t=0$ දී P රථය O සිට Q දුරින් ද Q රථය Oහි ද ඇත. Q ට සාපේක්ෂ ව P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

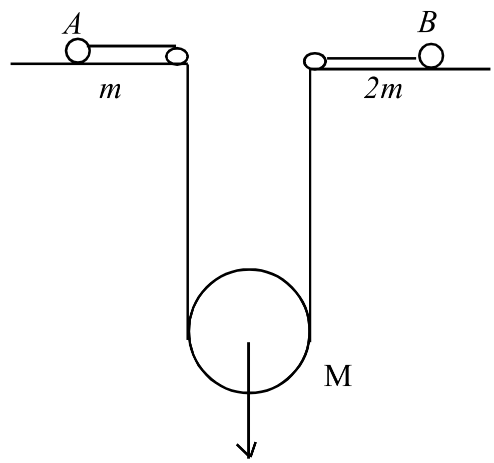
(i) රථ දෙක අතර කෙටි ම දුර $\dfrac{av\sin\alpha}{\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}}$ බව පෙන්වන්න. එම දුරෙහි පිහිටීමට ගත වූ කාලය සොයන්න.

(ii) ඒවා කෙටිතම දුරෙහි පිහිටන විට O සිට ඒවාට ඇති දුර අතර අනුපාතය $v+u\cos\alpha : u+v\cos\alpha$ බව ද පෙන්වන්න.

(02) (a) ස්කන්ධය W වූ රථයක උපරිම ජවය H වේ. වාතය හා සර්ෂණය ආදියෙන් ඇති වන නියත ප්‍රතිරෝධිත බලය R වේ. රථය $\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ ආනතියකින් යුතු මාර්ගයක උඩු අතට v උපරිම වේගයෙන් ද පහළට $2v$ උපරිම වේගයෙන් ද චලනය වේ. W හා n ඇසුරෙන් R සොයන්න. සමතලා මඟක රථයේ උපරිම වේගය u වේ. ඉහත ආනතියෙන් යුත් මාර්ගයේ උඩු අතට $\frac{u}{2}$ වේගයෙන් ගමන් කරන විට එහි උපරිම ත්වරණය සොයන්න.

(b) එකිනෙකට ලම්බ දිශාවන් ඔස්සේ ඒකක දෛශික $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ වූ තලයක A හා B අංශු චලනය වීමට නිදහස් ය. A ගේ වේගය $\left(-3\underline{i}+2q\underline{j}\right)ms^{-1}$ ද Bහි වේගය $v\left(\underline{i}+7\underline{j}\right)ms^{-1}$ වේ. මෙහි v යනු නියතයකි. Aට සාපේක්ෂ ව Bහි වේගය සොයා කාලය t වන විට $\overrightarrow{AB}$ දෛශිකය තවද සොයන්න. $t=O,\ \overrightarrow{AB}=\left(-56\underline{i}+8\underline{j}\right)m$ සහ අංශු එකිනෙක ගැටෙයි නම් vහි අගය සොයන්න. $v = 3$ වන විට $\overrightarrow{AB}$ දෛශිකය $\overrightarrow{AB}=\left(6t-56\right)\underline{i}+8(1-t)\underline{j}$ මගින් නිරූපණය වන බව පෙන්වන්න. එමගින් A හා B අංශු දෙක එකිනෙකට ළං වන විට t හි අගය සොයන්න.
සුදුසු දෛශික තිත් ගුණිතය යෙදීමත් සහ සොයා ගත් t සඳහා සහ $v = 3$ නම් $\overrightarrow{AB}$ දෛශික Bට සාපේක්ෂ Aහි ප්‍රවේගයට ලම්බක බව පෙන්වන්න.

(03) (a) ස්කන්ධය m හා $2m$ වන A හා B අංශු දෙකක් තන්තුවන දෙකෙළවර සම්බන්ධ කර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සුමටව චලනය විය හැකි ස්කන්ධය M වන කප්පියකට සම්බන්ධ කර තබා ඇත. A හා B ස්කන්ධ තිරස රළු තල දෙකක් මත තබා ඇති අතර ස්වායත්ත ඝර්ෂණ සංගුණක පිළිවෙළින් μ හා μ' වේ. පද්ධතිය නිශ්චලතාවන් අතහරිනු ලැබේ.



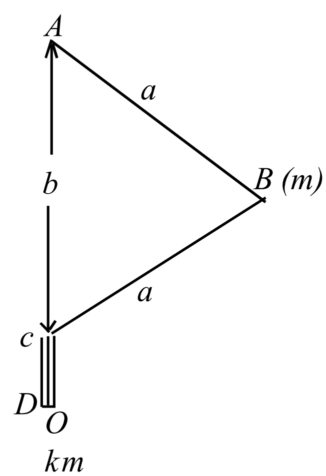
(i) තන්තුවේ ආතතිය

$$\frac{2Mmg\left(2+\mu+\mu'\right)}{\left(3M+8m\right)}$$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\mu > 2\mu'$, නම් චලිතය සඳහා

$$\frac{\mu}{\mu'+2} < \frac{M+8m}{2M}$$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් අචල ලක්ෂ්‍යකට සම්බන්ධ කර ඇත්තේ රූපයේ පරිදි $AB = BC = a$ වන පරිදි ය. සුමට සිරස් CD නලයක් Aට පහළින් සවි කර ඇත්තේ ACD එක ම සිරස් රේඛාවේ පිහිටන පරිදි සහ $AC = b$ වන පරදි ය. තන්තුවේ D කෙළවර කුඩා නලය තුළින් ස්කන්ධය m වන අංශුවක් දරා සිටියි. අංශුවට නලය තුළින් ගමන් කළ නොහැකි අතර B ලක්ෂ්‍යය ස්කන්ධය m වන අංශුවක් සම්බන්ධ කර ACවටා නියත කෝණික ප්‍රවේගයෙන් තිරස් වෘත්ත චලිතයක යෙදෙයි නම්



තන්තු කොටස් දෙකේ ආතති සහ D හි දී නලය මගින් අංශු මත ඇති කරන සිරස් බලය ද සොයන්න. තව ද $w^2 ab \geq 2g(a+kb)$ බව පෙන්වන්න. තන්තුව නොකැඩෙන පරිදි තන්තුව දැරිය හැකි උපරිම ආතතිය λmg නම් චලිතය පැවතීම සඳහා $(\lambda - k)b \geq 2a$ බව පෙන්වන්න.

(04) (a) සමාන m ස්කන්ධ සහිත A, B, හා C අංශු තුනක් $AB = BC = d$ වන පරිදි සුමට තිරස් මේසයක් මත සරල රේඛාවක පිහිටන සේ තබා ඇත. Bහි දිශාවට u ප්‍රවේශයෙන් A ප්‍රක්ෂේපනය කරයි. B ද ඒ මොහොතේ ම C දෙසට u ප්‍රවේගයෙන් මේසය දිගේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කවර හෝ අංශු දෙකක් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම්

(i) A, B සමඟ ගැටීමට ගත වූ කාලය සොයන්න.

(ii) ඉහත ගැටුම සිදුවන තුරු A චලිත වූ දුර සොයන්න.

(iii) B හා C අතර තවත් ගැටුමක් ඇති වන බව පෙන්වන්න.

(b) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල කුහර ගෝලයක සුමට ඇතුළු පෘෂ්ඨය මත O කේන්ද්‍රය අඩංගු සිරස් වෘත්තයක චලනය වේ. අංශුව ගෝලයේ පහත් ම ලක්ෂ්‍යයේ u තිරස් ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. මෙහි $u^2 > 2ag$ වේ. OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණය සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය v ද ගෝලය සහ අංශුව අතර අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව Rවේ. V හා R සඳහා m, a, u, θ හා g ඇසුරෙන් ප්‍රකාශන ලබා ගන්න. $u^2 < 5ag$ නම් ගෝලයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට පෙර අංශුව ගෝලයෙන් ඈත් වන බව පෙන්වන්න. අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන විට $\cos\theta$හි අගය u, a හා g ඇසුරෙන් සොයන්න. අංශුව A ලක්ෂ්‍යයේ දී ගෝලයෙන් ඈත් වී ප්‍රක්ෂේපිත මඟ AB විෂ්කම්භයේ වන පරිදි Bහි දී හමු වේ නම් OA සිරස සමඟ 45^0 සාදන බව පෙන්වා එවිට uහි අගය සොයන්න.

(05) (a) අංශුවක් තිරස් පොළොවට h දුරක් ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට α ආරෝහණ කෝණයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරෙයි. අංශුව තිරස් පොළොව මත ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $2h$ තිරස් දුරකින් පතිත වේ. ප්‍රක්ෂේපණ ප්‍රවේගය g, α හා h ඇසුරෙන් සොයන්න. අංශුව බිම පතිත වන විට එහි චලිත දිශාව තිරස සමඟ β, කෝණයක් සාදයි නම් $\tan\beta = 1 + \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

(b) M ස්කන්ධයෙන් හා α ආනතියකින් යුත් කුඤ්ඤයක් α කෝණය සහිත ආනත තලයක් මත තබා ඇත්තේ කුඤ්ඤයේ උඩු මුහුණත තිරස් වන පරිදි ය. ආරම්භයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ තිබෙන විට ස්කන්ධය M සහිත අංශුවක් කුඤ්ඤයේ සුමට උඩු මුහුණත මත තබනු ලැබේ. පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරිය පසු ව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය සොයන්න.

කුඤ්ඤයේ සහ ආනත තලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{M(M+m)g\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

(06) A හා B යනු සුමට මේසයක් මත $8l$ ඈතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. අංශුවක්, කෙළවරක් A ට සවි කර ඇති ස්වාභාවික දිග $2l$ ද ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය λ ද ඇති තන්තුවකට ද, Bට කෙළවරක් සවිකර ඇති ස්වාභාවික දිග $3l$ ද ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය 4λ ද ඇති වෙනත් තන්තුවකට ද ඈඳා ඇත. M යනු ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. අංශුව M හා B අතර පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයේ දී සමතුලිව පවතියි. $OM = \frac{2l}{11}$ බව පෙන්වන්න. අංශුව M ලක්ෂ්‍යයේ අල්ලා තබා මුදා හැරිය විට එය සරල අනුවර්තී චලිතයක යෙදෙන බව පෙන්වා දෝලන කාලාවර්තය සොයන්න. අංශුව M සිට $\frac{3l}{11}$ දුරකින් ඇති C ලක්‍ෂයේ දී B දෙසට චලනය වන විට එහි ප්‍රවේගය ගණනය කරන්න.

(07) ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ස්වාභාවික දිග $6a$ ද ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය $3mg$ ද සහිත තන්තුවක එක් කෙළවරකට සවි කර ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර තිරසට 30^0 කෝණයකින් ආනත වූ සුමට ආනත තලයක් මත පිහිටි O නම් ලක්ෂ්‍යයක සවි කර ඇත. තන්තුව ආනත තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ තිබෙන පරිදි අංශුව ආනත තලය මත පිහිටි C නම් ලක්ෂ්‍යයක නිසල ව ඇත. OC දිග කුමක් ද? අංශුව තවදුරටත් $2a$ දක්වා බෑවුම දිගේ පහලට ඇද සීරුවෙන් අතහරිනු ලැබේ. t කාලයේ දී C සිට අංශුවට ඇති දුර x නම් ශක්ති සංස්තති නියමය භාවිතයෙන් $\ddot{x} + \frac{gx}{2a} = 0$ බව පෙන්වන්න.

(08) (a) ABC යනු පාදයක දිග $2a$ වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. ABCත්‍රිකෝණයේ තලයේ ක්‍රියා කරන බල පද්ධතියක $A, B,$ හා C ලක්ෂ්‍ය වටා ඝූර්ණ පිළිවෙළින් $M, \frac{M}{2}$ සහ $2M$ වේ. දෙන ලද බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $\sqrt{\frac{7}{12}}\frac{M}{a}$ බව පෙන්වා සම්ප්‍රයුක්තයේ දිශාව AB සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න. සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB පාදය Dහි දී කපයි නම් AD සොයන්න.

(b) සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අරය a වූ ඒකාකාර බර ගෝලයක පෘෂ්ඨය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර රළු බිත්තියක පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර ඇත. එම ලක්ෂ්‍යකට සිරස් ව පහළින් වූ h දුරකින් වූ ලක්ෂ්‍යය ස්පර්ශ කරමින් ගෝලය නිසල ව පවතියි. ගෝලය බිත්තියේ පහළට ලිස්සා

යන අවස්ථාවේ ඇත. බිත්තිය හා ගෝලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම් තන්තුව සිරස සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න.

$\mu = \dfrac{h}{2a}$ ද ගෝලයේ බර W ද නම් තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W}{2\mu}\sqrt{1+\mu^2}$ බව පෙන්වන්න.

(09) (a) $ABCDEF$ යනු පාදයක දිග $2a$ වූ සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. P, P, Q හා $\sqrt{3}PN$ බව පිළිවෙළින් $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CE}$ හා $\overrightarrow{AE}$ පාද දිගේ ක්‍රියා කරයි.

(i) පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $Q = \sqrt{3}P$ වන විට පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය සොයන්න.

(iii) සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB පාදය G හිදී කැපේ නම් AG සොයන්න.

(b) බර W වන AB සහ BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් Bහි දී නිදහස් ලෙස අසවු කර ඇත. පද්ධතිය A කෙළවර දී සුමට ව නිදහස් ලෙස අසවු කර පහළ පිහිටි C කෙළවර තිරස්ව P බලයක් යොදා ඇත. සමතුලිත පිහිටීමේ දී AB දණ්ඩ යටි සිරස සමඟ 30^0 කෝණයක් සාදයි නම් BC සිරසට දරන ආනතිය සොයන්න. $P = \dfrac{W\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වා Bහි දි සම්ප්‍රයුක්තය සොයන්න.

(10) (a) බර පිළිවෙළින් $3W$ හා W වූ සමාන දිගින් යුත් ඒකාකාර AB හා AC දඬු දෙකක් Aහි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. B හා C කෙළවරවල් රළු තිරස් තලයක රැඳෙන සේ ඒවා සිරස් තලයක සමතුලිත ව ඇත. Bහි හා C හි දී ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. R හා S යනු පිළිවෙළින් ABහි සහ ACහි දී තලයෙන් මතුවන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියා ද $B\hat{A}C = 2\theta$ ද නම්

(i) $R = \dfrac{5}{2}w, S = \dfrac{3}{2}w$ බව පෙන්වන්න.

Qහි අගය බින්දුවේ සිට වැඩි වන විට B හා C කෙළවර දෙකෙන් සීමාකාරී අවස්ථාවට පැමිණෙන්නේ කුමන ලක්ෂ්‍යය දැයි සොයන්න.

(ii) $\tan\theta = \dfrac{3\mu}{2}$ බව පෙන්වා එක් දණ්ඩක් මගින් අනෙක් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සිරස සමඟ $\tan^{-1}(3\mu)$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

(b) පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ලෙහි $BC = 6a$ ද A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇත්තේ BC තිරස් ව සිටින පරිදි Bහි දී පහළට සහ BD ලම්බව ක්‍රියා කරන බලයක් මගිනි. $60N$ සහ $40N$ බර

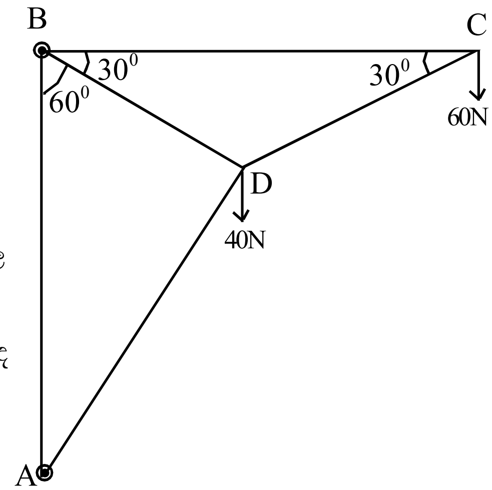
C සහ D ලක්ෂ්‍යවලින් එල්ලා ඇත. A අසවීමේ දී බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යබල සටහනක් ඇඳ දඬුවල ප්‍රත්‍යබලවල විශාලත්වය සොයන්න.

අතර තෙරපුම් යන්න හඳුන්වා දෙන්න.

(i) Bහි බලය

(ii) අසවීමේ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව

(iii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යබල සටහනක් ඇඳ දඬුවල ප්‍රත්‍යබලවල විශාලත්වය සොයා ඒවා තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.



(11) (a) $\underline{i}, \underline{j}$ යනු පිළිවෙළින් Ox හා Oy අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික වේ. $F_1 = 3\underline{i} + 4\underline{j}$, $F_2 = -\underline{i} + 6\underline{j}$, $F_3 = -3\underline{i} - 3\underline{j}$ බල $r_1 = 2\underline{i} + 3\underline{j}$, $r_2 = 6\underline{i} + \underline{j}$, $r_3 = -3\underline{i} + 2\underline{j}$ යන පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍යයන්හි දී ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\underline{R}$ සහ එහි ක්‍රියා රේඛාවේ කාටීසිය සමීකරණය සොයන්න. පද්ධතියට සිවුවැනි $\underline{F_4}$,බලයක් ද බලවල තලයේ ක්‍රියා කරන ඝූර්ණය $\underline{G}$ යුග්මය ද එකතු කළ විට පද්ධතිය සමතුලිතතාව් පවතී නම් $\underline{F_4}$ සහ $\underline{G}$ සොයන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයේ බල $\lambda\overrightarrow{BC}$, $\mu\overrightarrow{CA}$ හා $\gamma\overrightarrow{AB}$ පිළිවෙළින් BC, CA හා AB පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි $\lambda = \mu = \gamma$ නම් හා එනම් පමණක් බල පද්ධතිය යුග්මයක ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

(c) $M\,kg$ ස්කන්ධය α ආනතියෙන් යුත් තලය දිගේ ඉහළට චලනය කරවීමට අවශ්‍ය අවම බලය P යන්න $P = Mg\sin(\lambda + \alpha)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අංශුව හා තලය අතර ඝර්ෂණ කෝණය යි. ස්කන්ධය තලය ඔස්සේ ඉහළට චලනය කිරීමට අවශ්‍ය තලයට සමාන්තර අවම බලය $P\sec\lambda$ බව පෙන්වන්න.

(12) (a) අරය a ද බර W ද වන ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් එක් එක් තලය α කෝණයකින් ආනත වූ රළු ආනත තල දෙකක් මත සිය තලය සිරස් වන පරිදි නිසල ව පවතියි. තලවල ඡේදන රේඛාව තැටියේ තලයට ලම්බ වේ. එක් එක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම් තැටියේ කේන්ද්‍රය වටා තැටියේ තලය කැරකැවීමට අවශ්‍ය යුග්මය ඝූර්ණයේ අවම අගය $\dfrac{\mu W a}{\left(1+\mu^2\right)\cos\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

(b) ඝණත්වය ρ ද, අරය r ද උස වන ඍජු ඝන කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨය අරය $4r$ ද ඝණත්වය σ වන ඝන අර්ධ ගෝලයක වක්‍ර පෘෂ්ඨය හා සමපාත කිරීමෙන් ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත. එම ඝණ වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ සිට ඇති දුර $\frac{r}{8}\left[\frac{16\rho-3\sigma}{2\rho+\sigma}\right]$ බව පෙන්වන්න.

$\rho=\sigma$ නම් ඝන වස්තුව තල පෘෂ්ඨ සම්බන්ධ වන මායිමේ ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලූ විට ඝන වස්තුවේ සිරසට ආනත වන කෝණය සොයන්න.

(13) අරය a ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පවතින බව පෙන්වන්න. ඝන අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් සාදා ඇත්තේ අරය $2a$ වන ඝන අර්ධ ගෝලයකින් අරය a වන ඝන අර්ධ ගෝලයක් හාරා ඉවත් කිරීමෙනි. ඝන අර්ධ ගෝල දෙකෙහි ම කේන්ද්‍රය O නම් පාත්‍රයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර සොයන්න.

(i) පාත්‍රය පිටත දාරයේ ලක්ෂ්‍යයක එල්ලූ විට තල මුහුණත තිරස සමඟ සාදන කෝණය α නම් $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{112}{45}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) තිරසට θ කෝණයකින් ආනත තලයක් මත වක්‍ර පෘෂ්ඨය ගැටෙමින් පාත්‍රය සමතුලිතවේ ඇත්නම් හා තලය ස්පර්ශය ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට තරම් රළු නම් θහි උපරිම අගය සොයන්න.

(14) (*a*) ධීවරයෙක් ඉරිදා දිනවල මසුන් ඇල්ලීම සඳහා තම නිවසට සමීප වූ ස්ථාන තුනකින් එකකට යාම සිරිතකි. ඔහු ඉරිදා දිනක දී මසුන් ඇල්ලීම සඳහා මුහුදට යාමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{2}$ ද ගඟට යාමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{4}$ ද විලට යාමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{4}$ ද වේ. ඔහු මුහුදට ගිය විට මසුන් ඇල්ලීමට ඇති හැකියාව 80% ද ගඟට ගිය විට මසුන් ඇල්ලීමට ඇති හැකියාව 40% ද විලට ගිය විට මසුන් ඇල්ලීමට ඇති හැකියාව 60% ද වේ.

(i) ඉරිදා දිනවල ඔහු මසුන් ඇල්ලීමේ හැකියාවේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

(ii) එළඹෙන ඉරිදා දවස් 3කින් යටත් පිරිසෙයින් ඉරිදා දවස් දෙකක දී වත් මසුන් අල්ලා තිබීමේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

(iii) එක්තරා ඉරිදා දවසක මාළුන් ඇල්ලීමෙන් තොර ව ආපසු ගියේ නම් ඔහු මාළුන් ඇල්ලීම සඳහා එදින ස්ථාන තුනකින් කුමන ස්ථානයකට ගොස් තිබීමට වැඩි හැකියාවක් තිබේ ද?

(iv) සෑම ඉරිදාවක ම මාළුන් ඇල්ලීම සඳහා යන ඔහුගේ මිත්‍රයකු මෙම ස්ථාන තුනකට ම මාළුන් ඇල්ලීම සඳහා යාමේ සම්භාවිතා සමාන වේ. ඊළඟට එළඹෙන ඉරිදා දවස් තුනෙන් එක් දවසක දී වත් ඔවුන් දෙදෙනා හමු වීමේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

(*b*) කර්මාන්ත ශාලාවක සිටින සේවකයන් සංඛ්‍යා සහ ඔවුන්ට පැයකට ගෙවන ලද වේතන පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවෙහි දක්වේ.

වේතනය/පැයකට (රුපියල්)	සේවක සංඛ්‍යාව
900 - 800	14
800 - 700	44
700 - 600	96
600 - 500	175
500 - 400	381
400 - 300	527
300 - 200	615
200 - 100	660

(i) පැයකට ගෙවනු ලබන වේතනයේ මධ්‍යයනය

(ii) සම්මත අපගමනය

(iii) මධ්‍යස්ථය

(iv) කුටිකතා සංගුණකය සොයන්න.

(v) ව්‍යාප්තියේ හැඩය දක්වීමට දළ වක්‍රයක් අඳින්න.

(15) (*a*) ක්‍රීඩා සමාජයක සාමාජිකයන්ගෙන් $\frac{3}{4}$ ක් වැඩිහිටියන් වන අතර $\frac{1}{4}$ ළමයිවෙති. වැඩිහිටියන්ගෙන් $\frac{3}{4}$ ක් හා ළමයින්ගෙන් $\frac{3}{5}$ ක් පිරිමි වෙති. වැඩිහිටි පිරිමින්ගෙන් $\frac{1}{2}$ ක් ද ගැහැනුන්ගෙන් $\frac{1}{3}$ ක් ද එහි පිහිනුම් තටාකය භාවිත කරති. ළමයින් සඳහා අනුරූප අනුපාතය සියලු ගැහැනු පිරිමි ළමයි සඳහා $\frac{4}{5}$ වේ.

(i) සමාජයේ සාමාජිකයකු පිහිටුම් තටාකය පරිහරණය කරන කෙනෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) පිහිනුම් තටාකය පරිහරණය කරන්නකු ගැහැනු අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) පිහිනුම් තටාකය පරිහරණය කරන්නකු පිරිමි ළමයකු වීමේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

(iv) පිහිනුම් තටාකය පරිහරණය නොකරන සාමාජිකයකු, වැඩිහිටියකු හෝ ගැහැනු අයකු හෝ වීමේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

(*b*) ජනගහනයක n_1 ප්‍රමාණයක් පිරිමි ද n_2 ප්‍රමාණයක් ගැහැනු ද අඩංගු වෙති. පිරිමින්ගේ උසෙහි මධ්‍යන්‍යය μ_1 ද ගැහැනුන්ගේ උසෙහි මධ්‍යනය μ_2 ද නම් විචලතාව $\sigma_1{}^2$ සහ $\sigma_2{}^2$ නම් මුළු ජනගහනයේ මධ්‍යන්‍යය උස $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$ සහ විචලත්වය $w_1\sigma_1^2 + w^2\sigma_2^2 + w_1 w_2\left(\mu_1 - \mu_2\right)^2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $w_1 = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$ and $w_2 = \dfrac{n_2}{n_1 + n_2}$ වේ.

ළමයි 20 දෙනකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමක ලකුණුවල මධ්‍යනය 40 ද සම්මත අපගමනය 5 ද වේ. තමන් ගණනයේ දි 15 යන ලකුණ 50 ලෙස වැරදියට එකතු කර ඇත. නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න. ළමයි 30 දෙනෙකුගෙන් යුත් වෙනත් කණ්ඩායමක ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 40.25 සහ 8 නම් ළමයි 50 දෙනකු සහිත කණ්ඩායමේ මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.

සංයුක්ත ගණිතය I
A කොටස

1. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)-14=0$

Let $y=x-\frac{1}{x}$

$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$

$2(y^2+2)-y-14=0$

$2y^2-y-10=0$

$(2y-5)(y+2)=0$

$y=\frac{5}{2}$ හෝ $y=-2$

$x-\frac{1}{x}=-2$

$x^2+2x-1=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}$

$x=-1\pm\sqrt{2}$

$x-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$2x^2-5x-2=0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

2. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2x-1}$

$x\geq-\frac{1}{3}$ සහ $x\leq2$ සහ $x\geq\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\leq x\leq2$

වර්ග කිරීමෙන්

$(3x+1)+(2-x)-2\sqrt{(3x+1)(2-x)}=2x-1$

$2=\sqrt{(3x+1)(2-x)}$

$4=(3x+1)(2-x)$

$3x^2-5x+2=0$

$(3x-2)(x-1)=0$

$x = \frac{2}{3}$ හෝ 1

$x = 1$ නම් L.H.S $= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$

R.H.S $= \sqrt{1} = 1$

L.H.S $=$ R.H.S

$x = \frac{2}{3}$ නම් R.H.S $= \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

L.H.S $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

R.H.S $=$ L.H.S

එනයින් $x = \frac{2}{3}$ හෝ 1

3. $\log_9 \left(xy^2\right) = \log_9 x + \log_9 y^2$

$$= \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 y^2}{\log_3 9}$$

$$= \frac{\log_3 x}{2} + \frac{2\log_3 y}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 x + \log_3 y$$

$\log_3 x = a$ ලෙස ද $\log_3 y = b$ ලෙස ද සලකමු.

$\log_9 (xy^2) = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$

$a + 2b = 1$ ——— (1)

$\log_3 x . \log_3 y = -3$ $\qquad ab = -3$ ——— (2)

(1) හා (2) න්

$b(1-2b) = -3$

$2b^2 - b - 3 = 0$

$(2b-3)(b+1) = 0$

$b = \frac{3}{2}$ නම් $a = -2$ $\qquad b = -1$ නම් $a = 3$

$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{9} \\ y = 3\sqrt{3} \end{array}\right\}$ හෝ $\left.\begin{array}{l} x = 27 \\ y = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$

4. $f(x) = 3x^3 + Ax^2 - 4x + B$

$f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{9} + \dfrac{4A}{9} + \dfrac{8}{3} + B = 0$

$4A + 9B = -16$ ——————— (1)

$f(-1) = -3 + A + 4 + B = 2$

$A + B = 1$ ——————— (2)

(1) හා (2)න් $A = 5,\ B = -4$

$3x^3 + 5x^2 - 4x - 4 = (3x+2)(x^2 + x - 2)$

$= (3x+2)(x+2)(x-1)$

5. $f(x) = x^4 + hx^3 + gx^2 - 16x - 12$

$f(-1) = 1 - h + g + 16 - 12 = 0$

$h - g = 5$ ——————— (1)

$f(1) = 1 + h + g - 16 - 12 = -24$

$h + g = 3$ ——————— (2)

(1) හා (2) න් $h = 4,\ g = -1$

$f(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$

$f(2) = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$

$(x-2)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයකි

$f(-1) = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$

$(x+1)$ යනු $f(x)$ හි සාධනයකි.

$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$

$= (x+1)(x-2)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$

6. $ax^2 + bx + c = 0$

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$x + 2 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{b^2}{ac}$

$x^2 - \left(\dfrac{b^2}{ac} - 2\right)x + 1 = 0$

$$x^2 - \left(\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} - 2\right)x + 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

$x = \dfrac{\alpha}{\beta}$ හෝ $\dfrac{\beta}{\alpha}$

7. $x^2 + bx + ca = 0,\ \ x^2 + cx + ab = 0$ සමීකරණවල පොදු මූලය α ලෙස සලකමු.

$$\alpha^2 + b\alpha + ca = 0 \text{ ——— } (1)$$
$$\alpha^2 + c\alpha + ab = 0 \text{ ——— } (2)$$

(1) - (2) $\quad \alpha = \dfrac{a(b-c)}{(b-c)} = a$

α, β යනු (1) ස්ථානයේ මුල නම්

$\alpha\beta = ca$ සහ $\alpha = a$ එනම් $\beta = c$

α, γ යනු (2)හි මුල නම්

$\alpha\gamma = ab$ සහ $\alpha = a$ එනම් $\gamma = b$

$\alpha + \beta = -b$ එනම් $a + c = -b$

β සහ γ මූල වශයෙන් ඇති වර්ග සමීකරණය

$$(x-\beta)(x-\gamma) = 0$$
$$x^2 - (\beta+\gamma)x + \beta\gamma = 0$$
$$x^2 - (b+c)x + bc = 0$$
$$x^2 + ax + bc = 0$$

8. $g(x) = ax^2 - 2x + (3a+2)$

x හි තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x)$ ධන වීමට

$a > 0$ සහ $\Delta < 0$

$a > 0$ සහ $\quad 4 - 4a(3a+2) < 0$

$$3a^2 + 2a - 1 > 0$$
$$(3a-1)(a+1) > 0$$

$a < -1$ හෝ $a > \dfrac{1}{3}$

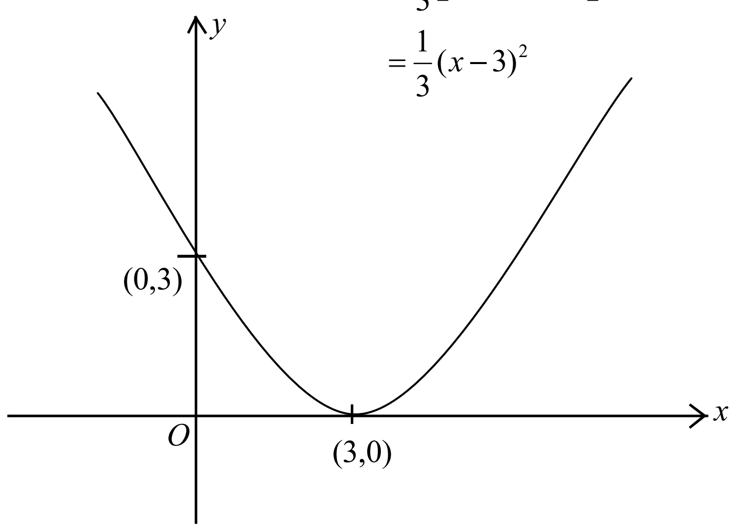
$a > 0$ හෙයින් $a > \dfrac{1}{3}$

විසඳුම් $\left\{ x : x \in \mathbb{R}, x > \dfrac{1}{3} \right\}$

$a = \dfrac{1}{3}$ විට $g(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

$= \dfrac{1}{3}\left[x^2 - 6x + 9 \right]$

$= \dfrac{1}{3}(x-3)^2$

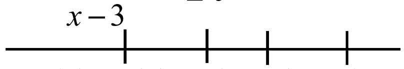


09. $\dfrac{12}{x-3} \le x + 1$

$\dfrac{12}{x-3} - (x+1) \le 0$

$-\dfrac{(x^2 - 2x - 15)}{x-3} \le 0$

$-\dfrac{(x-5)(x+3)}{x-3} \le 0$



$(x-5)(x+3)(x-3) \ge 0 (x \ne 3)$

$-3 \le x < 3$ හා $x \ge 5$

10. $|1-2x|-|x+2| \le 2$

$x < -2$ විට $1-2x+(x+2) \le 2$

$x \ge 1$ විසඳුම් නැත ——————— (1)

$-2 \le x < \frac{1}{2}$ විට $1-2x-(x+2) \le 2$

$-3x-1 \le 2$

$x \ge -1$

විසඳුම් $-1 \le x < \frac{1}{2}$ ——————— (2)

$x \ge \frac{1}{2}$ විට $-(1-2x)-(x+2) \le 2$

$-1+2x-x-2 \le 2$

$x \le 5$

$\frac{1}{2} \le x \le 5$ ——————— (3)

$-1 \le x \le 5$

එම නිසා විසඳුම් $= \{x : x \in R, -1 \le x \le 5\}$

11. ළමයින් 8 දෙනා වාඩිවිය හැකි ආකාර ගණන $8!$

$8! = 40\ 320$

(i) සඳහන් කළ ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනා එක ළඟ වාඩි විය හැකි ආකාර ගණන $2 \times 7!$

විශේෂ ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනා එක ළඟ වාඩි විය නොහැකි ආකාර ගණන

$8! - 2 \times 7!$

$= 7!(8-2)$

$= 7! \times 6 = 30240$

(ii) පිරිමි ළමයින් 4 දෙනා වාඩි විය හැකි ආකාර ගණන $= 4!$

$\uparrow \overset{*}{B_1} \uparrow \overset{*}{B_2} \uparrow \overset{*}{B_3} \uparrow \overset{*}{B_4} \uparrow$

ගැහැනු ළමයි 4 වාඩි විය හැකි ආකාර $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5!$

වාඩි විය හැකි මුළු ආකාර ගණන

$= 4! \times 5! = 2880$

12. $\left(x^2 - \frac{2k}{x}\right)^{10}$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r \left(x^2\right)^{10-r} \left(-\frac{2k}{x}\right)^r$$

$$= {}^{10}C_r (-2k)^r x^{20-3r}$$

x^2 :හි සංගුණකය සැපයීමෙන් $20 - 3r = 2$

$$r = 6$$

x^2 හි සංගුණකය : ${}^{10}C_6 (-2k)^6$

x^{-1} සංගුණකය : $20 - 3r = -1$

$$r = 7$$

x^{-1} සංගුණකය ${}^{10}C_7 (-2k)^7$

$${}^{10}C_6 (-2k)^6 = {}^{10}C_7 (-2k)^7$$

$$\frac{10!}{6! \times 4!}(-2k)^6 = \frac{10!}{7! \times 3!}(-2k)^7$$

$$k = -\frac{7}{8}$$

13. $(1 + 2x + kx^2)^n$

$$= \left[1 + x(2 + kx)\right]^n$$

$$= 1 + nC_1 x(2 + kx) + {}^nC_2 x^2 (2 + kx)^2 + {}^nC_3 x^3 (2 + kx)^3 + \ldots$$

x^2 හි සංගුණකය : $k.{}^nC_1 + 4.{}^nC_2$

$$= nk + 2n(n-1)$$

x^3 හි සංගුණකය : $4k.{}^nC_2 + 8.{}^nC_3$

$$= 2n(n-1)k + \frac{4n(n-1)(n-2)}{3}$$

$nk + 2n(n-1) = 30$ ——————— (1)

$2n(n-1)k + \frac{4n(n-1)(n-2)}{3} = 0$ ——— (2)

(2) න් $k + \frac{2(n-2)}{3} = 0$

(1) ට ආදේශයෙන් $\dfrac{-2n(n-2)}{3}+2n(n-1)=30$

$2n^2-n-45=0$

$(2n+9)(n-5)=0$

$n=5$, n ධන නිඛිලයක් බැවින්

$n=5$ සහ $k=-2$

14. $Z=-1+i\sqrt{3}$

$=2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$|Z|=2, Arg(Z)=\dfrac{2\pi}{3}$

$Z^2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2=-2-i2\sqrt{3}$

$Z^2+pz=\left(-2-i2\sqrt{3}\right)+p\left(-1-i\sqrt{3}\right)$

$=(-2-p)+i\left(\sqrt{3}p-2\sqrt{3}\right)$

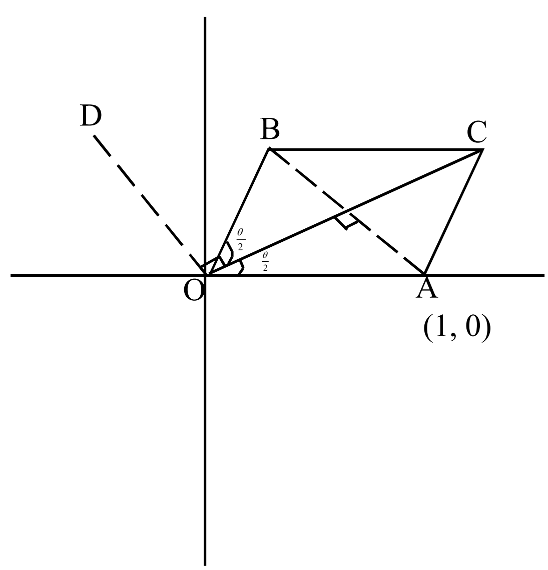
Z^2+pz තාත්ත්වික බැවින් , $\sqrt{3}p-2\sqrt{3}=0;\quad p=2$

$Z^2+qz=(-2-q)+i\left(\sqrt{3}q-2\sqrt{3}\right)$

$\dfrac{\sqrt{3}(q-2)}{-(q+2)}=\tan\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$q=4$

15. $OA=|z|=1$



$OB=|\cos\theta+i\sin\theta|=1$

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයකි

C මගින් Z_1+Z_2 නිරූපණය වේ.

$OA=OB$ බැවින් $OACB$ රොම්බසයකි

$OD=AB, OD$ AB ට සමාන්තර වේ.

D, මගින් Z_2-Z_1 නිරූපණය වේ.

$$|Z_1 + Z_2| = OC = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$Arg(Z_1 + Z_2) = \frac{\theta}{2}$$

$$AB = |Z_2 - Z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$Arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_2 - Z_1|^2$$

$$= \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 4$$

16. (a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$

$$= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a)}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a)}{2}\right)}{2\times\left(\frac{x-a)}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a)}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x-a)}{2}\right)}{\left(\frac{x-a)}{2}\right)}$$

$$= \cos a$$

(b) $\sin y = x.\sin(y+a)$ ——————— (1)

x විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$$\cos y.\frac{dy}{dx} = x.\cos(y+a).\frac{dy}{dx} + \sin(y+a)$$

(1)න් $\quad x = \dfrac{\sin y}{\sin(y+a)}$

$$\cos y.\frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{\sin(y+a)}.\cos(y+a).\frac{dy}{dx}+\sin(y+a)$$

$$\left[\cos y-\frac{\sin y.\cos(y+a)}{\sin(y+a)}\right]\frac{dy}{dx}=\sin(y+a)$$

$$\frac{\sin a}{\sin(y+a)}.\frac{dy}{dx}=\sin(y+a)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(y+a)}{\sin a}$$

17. (*a*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x.x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(*b*) $y=x^n.lnx$

$$\frac{dy}{dx}=x^n.\frac{1}{x}+lnx.n.x^{n-1}$$

$$x.\frac{dy}{dx}=x^n+n.lnx.x^n$$

$$x.\frac{dy}{dx}=x^n+ny$$

$$x.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=n.x^{n-1}+n.\frac{dy}{dx}$$

$$x.\frac{d^2y}{dx^2}+(1-n)\frac{dy}{dx}=n.x^{n-1}$$

එම නිසා $n=3$

18. $x = t + lm\,\mathrm{t}$ $\qquad$ $y = t - lm\,\mathrm{t}$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t} \qquad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t}$$

$$= \frac{t+1}{t} \qquad = \frac{t-1}{t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t-1}{t+1} \qquad \text{———————— (1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \times \frac{t}{t+1}$$

$$= \frac{2t}{(t+1)^3}$$

නම් $t = \frac{x+y}{2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x+y}{\left(\frac{x+y}{2}+1\right)^3} = \frac{8(x+y)}{(x+y+2)^3}$$

19. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2}$

$$= \frac{(1+x)^2 - (1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\tan^{-1}1 + \frac{1}{2}\right) - (0+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}1 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

20. $x = 2(1+\cos^2\theta)$

$x \to 2, \theta \to \frac{\pi}{2}$

$x \to 3, \theta \to \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\cos\theta.\sin\theta$$

$$\int_2^3 \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}}.(-4\cos\theta.\sin\theta.d\theta)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.(-4\cos\theta.\sin\theta)d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

21. $I=\int e^{4x}.\cos 3x dx, \qquad J=\int e^{4x}.\sin 3x.dx$ ලෙස සලකමු

$I=\int e^{4x}.\cos 3x dx = e^{4x}.\frac{\sin 3x}{3}-\int \frac{\sin 3x}{3}\times 4e^{4x}dx$

$3I+4J=e^{4x}.\sin 3x$ ——————— (1)

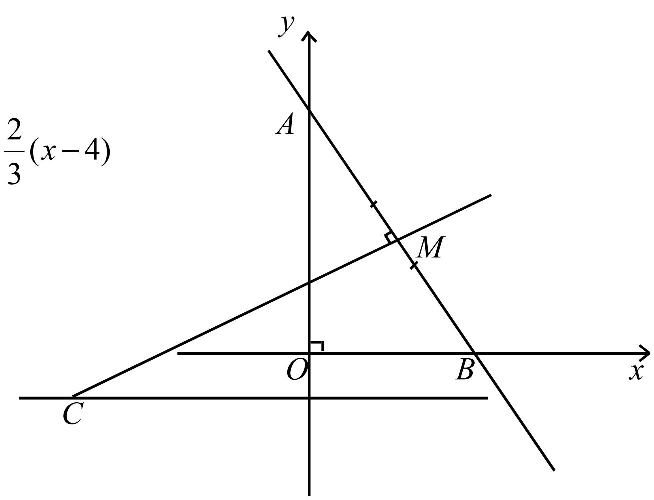
$J=\int e^{4x}.\sin 3x dx = e^{4x}.\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right)-\int\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right)\times 4e^{4x}dx$

$4I+3J=e^{4x}.\cos 3x$ ——————— (2)

(1) හා (2) න් $I=\frac{1}{25}e^{4x}(3\sin 3x+4\cos 3x)$

22. $A\equiv(0,12), \qquad B\equiv(8,0)$

$M\equiv(4,6)$



MC රේඛා සමීකරණය $y-6=\frac{2}{3}(x-4)$

$3y-2x-10=0$

C හිදී $y=-1, \qquad x=-\frac{13}{2}$

$C\equiv(-\frac{13}{2},-1)$

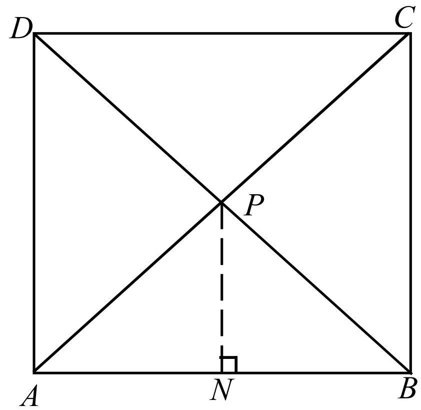
දුර AB $=\sqrt{8^2+12^2}=\sqrt{208}$

දුර MC $=\sqrt{(4+13)^2+(6+1)^2}=\sqrt{\frac{441}{4}+49}$

ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=\frac{1}{2}\times\sqrt{208}\times\sqrt{\frac{637}{4}}=\frac{364}{4}$

$=$ 91 වර්ග ඒකක

23. AB:හි සමීකරණය $x-2y=0$



$P \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

PN ලම්බක බැවින් AB ට

$$PN = \frac{\left|\frac{5}{2}-5\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

DCට සමාන්තර බැවින් AB

DCහි සමීකරණය $x-2y+k=0$.

P සිට CDට ඇති ලම්බ දුර $\frac{5}{2}$ බැවින්

$$\frac{\left|\frac{5}{2}-5+k\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$|2k-5|=5,\quad k=5$ or 0

CDහි සමීකරණය $x-2y+5=0$

BC සහ AD රේඛා $x-2y=0$ රේඛාවට ලම්බක වේ.

BC සහ AD රේඛාවල සමීකරණ $2x+y+d=0$ ආකාරය වේ.

P සිට ලම්බක දුර $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{\left|2\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+d\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$d=-10,-5$

එම නිසා සමීකරණ $2x+y-5=0,\quad 2x+y-10=0$

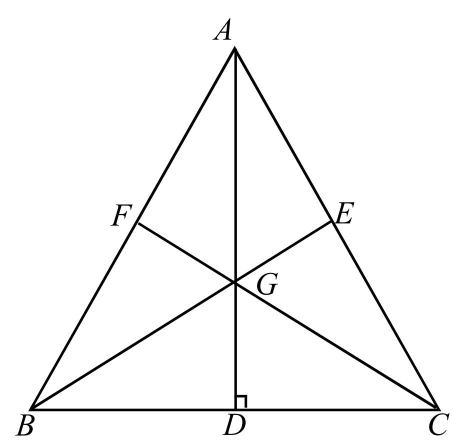
24. $AB = AC$ බැවින් AD BC ට ලම්බක වේ.

මධ්‍යස්ථ තුන හමු වන ලක්ෂ්‍යය G.

$A \equiv (0,8)$

$BE : x+3y=14$

$CF : 3x-y=2$



$G \equiv (2,4), \quad D \equiv (x_0, y_0)$

$AG : GC = 2:1$

$\dfrac{2x_0 + 0}{2+1} = 2, \quad \dfrac{2y_0 + 8}{2+1} = 4$

$D \equiv (x_0, y_0) \equiv (3,2)$

BC සමීකරණය $\quad y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-3)$

$2y - x - 1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} BC: 2y - x - 1 = 0 \\ BE: 3y + x - 14 = 0 \end{array}\right\} \quad B \equiv (5,3)$

$\left.\begin{array}{l} BC: 2y - x - 1 = 0 \\ CF: 3x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \quad C \equiv (1,1)$

AB හි සමීකරණය $\quad y - 3 = -1(x-5)$

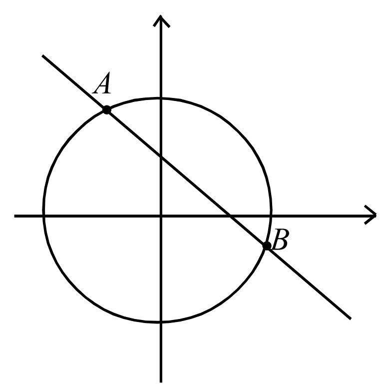
$y + x - 8 = 0$

AC හි සමීකරණය $\quad y - 1 = -7(x-1)$

$y + 7x - 8 = 0$

25. $S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$

$l \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$



A හා B හරහා යන කුමන වෘත්තයක වුව ද සමීකරණය

$(x^2 + y^2 - a^2) + \lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$

ලෙස ලිවිය හැකිය.

මෙහි කේන්ද්‍රය $\left(-\dfrac{\lambda\cos\alpha}{2}, -\dfrac{\lambda\sin\alpha}{2}\right)$

AB වෘත්තයේ විෂ්කම්භය බැවින්

$\left(-\dfrac{\lambda\cos\alpha}{2}, -\dfrac{\lambda\sin\alpha}{2}\right)$, ලක්ෂ්‍ය $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ රේඛාව මත පිහිටයි.

$-\dfrac{\lambda\cos\alpha}{2}.\cos\alpha - \dfrac{\lambda\sin\alpha}{2}.\sin\alpha - p = 0$

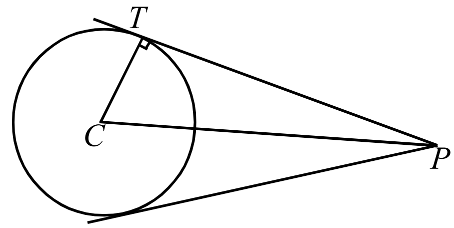
$\lambda = 2p$

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x^2 + y^2 - a^2) - 2p(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$

26. කේන්ද්‍රය $C \equiv (2,1)$

$P \equiv (4,2)$



අරය $= \sqrt{4+1-4} = 1$

$CP = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$

(1) $CP > 1,\ P$ ලක්ෂ්‍ය S ට පිටතින් පිහිටයි

(11) $PT = \sqrt{CP^2 - 1^2} = \sqrt{5-1} = 2$

ස්පර්ශකයේ සමීරකණය $y = mx + c$ ලෙස සලකමු

මෙය $P(4, 2)$ හරහා යන බැවින්

$2 = 4m + c$

$y = mx + (2-4m)$

$y - mx - (2 - 4m = 0$

$CT = 1$

$\frac{|1 - 2m - 2 + 4m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$

$|2m - 1| = \sqrt{1+m^2}$

$(2m-1)^2 = m^2 + 1$

$m = 0$ or $\frac{4}{3}$

If $m = 0$, $\quad$ C = 2

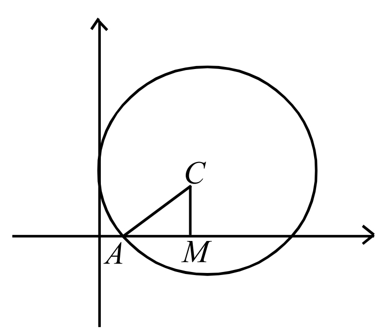
If $m = \frac{4}{3}$, $\quad C = -\frac{10}{3}$

ස්පර්ශකවල සමීකරණ $y = 2,$ සහ $3y - 4x + 10 = 0$

27. වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

කේන්ද්‍රය $(-g, -f)$ සහ අරය = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

C සිට y අක්ෂයට ඇති ලම්බ දුර වෘත්තයේ අරයට සමාන විය යුතුයි



$\frac{|g|}{1} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$g^2 = g^2 + f^2 - c$

$c = f^2$

සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + f^2 = 0$

$$AC^2 = AM^2 + MC^2$$

$$g^2 + f^2 - f^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + f^2$$

$$g^2 = f^2 + \frac{9}{4}$$

සාධාරණ සමීකරණ

$$x^2 + y^2 + 2\left(\sqrt{f^2 + \frac{9}{4}}\right)x + 2fy + f^2 = 0$$

කේන්ද්‍රය $\left(-\sqrt{f^2 + \frac{9}{4}}, -f\right)$

$$x_0 = -\sqrt{f^2 + \frac{9}{4}}, \qquad y_0 = -f$$

$$x_0^{\;2} - y_0^{\;2} = \frac{9}{4}$$

$$4x_0^{\;2} - 4y_0^{\;2} = 9$$

(x_0, y_0) හි පථය $4x^2 - 4y^2 = 9$

28. $\cos 6\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta + 1 = 0 \qquad (o < \theta < \pi)$

$$2\cos 5\theta.\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$$

$$2\cos\theta(\cos 5\theta + \cos\theta) = 0$$

$$4\cos\theta.\cos 3\theta.\cos 2\theta = 0$$

$\cos\theta = 0 \qquad \cos 3\theta = 0 \qquad \cos 2\theta = 0$

$\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} \qquad 3\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} \qquad 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{\pi}{2}; \qquad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}; \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

29. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = A$ ලෙස සලකමු

$\tan A = \frac{1}{3}$,

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{3}{4}$

$0 < 2A < \frac{\pi}{4}$, $2A = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

Let $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = B$

$\tan B = \frac{1}{7}$ සහ $0 < B < \frac{\pi}{4}$

$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= 2A + B$ සහ $0 < 2A + B < \frac{\pi}{2}$

$$\tan(2A+B) = \frac{\tan 2A + \tan B}{1 - \tan 2A.\tan B} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}} = 1$$

$2A + B = \frac{\pi}{4}$

$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$

30. $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b+c-a}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)+\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c-a}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c-a}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c-a}{2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}.\cos\frac{A}{2}=\frac{b+c-a}{2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}.\cos\frac{A}{2}$$

$$2a\cot\frac{A}{2}=(b+c-a)\frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$2a\cot\frac{A}{2}=(b+c-a)\frac{\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$2a\cot\frac{A}{2}=(b+c-a)\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)$$

31. Let $\mathbb{Z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

$\mathbb{Z} = 1 + \sqrt{3}i$

$= \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \mathbb{Z}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ද මුවාවර් ප්‍රමේයයෙන්,

$$\mathbb{Z}^7 = 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$$

$$= 128\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left|\mathbb{Z}^7\right| = 128$$

$$Arg(\mathbb{Z})^7 = \frac{\pi}{3}$$

32. Let $\mathbb{Z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

If $\mathbb{Z} = \cos\theta + i\sin\theta$ then

$\mathbb{Z}^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (2\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

තාත්වික කොටස සමාන කිරීමෙන්

$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos 3\theta$

$\cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = \cos 3\theta$

$\cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = \cos 3\theta$

$\therefore \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

අතාත්වික කොටස සමාන කිරීමෙන්,

$$3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

$$3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

$$\sin^3\theta-3\sin\theta+3\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

$$\therefore \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

33. $y=t^2(1-t)$

$$\frac{dy}{dx}=t^2(-1)+(1-t)2t=-t^2+2t-3t^2$$

$$=-3t^2+2t$$

$$=t(2-3t)$$

$$x=t(1-t)^2$$

$$\frac{dx}{dy}=t.2(1-t)(-1)+(1-t)^2.1$$

$$=-2t+2t^2+t^2+1-2t$$

$$=3t^2-4t+1$$

$$=(1-t)(1-3t)$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{t(2-3t)}{(1-t)(1-3t)}$$

$$t=T$$

$$\frac{dx}{dy}\Big|t=T=\frac{t(2-3t)}{(1-t)(1-3t)}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}=-1$$

$$y=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

$$x=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

$$\frac{y-\frac{1}{8}}{x-\frac{1}{8}}=-1$$

$$\frac{8y-1}{8x-1}=-1$$

$$8y-1=-8x+1$$

$$8y+8x-2=0$$

$$4y+4x-1=0$$

34. $y=x^2-3x$

$$y=x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}$$

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

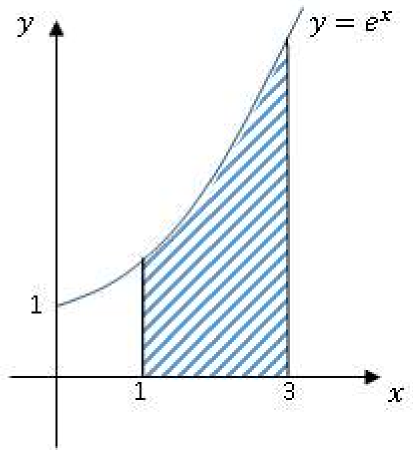
$$\left|\int_0^3 (x^2-3x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right|$$

$$=\left|\frac{27}{3}-\frac{27}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{27}{6}\right| \quad =\frac{27}{6}$$ වර්ග ඒකක

(35)



$$R = \int_1^3 e^x dx$$

$$= \left[e^x \right]_1^3$$

$$= e^3 - e^1 \quad = e(e^2 - 1)$$

$$V = \int_1^3 \pi y^2 dx$$

$$= \int_1^3 \pi (e^x)^2 dx$$

$$= \int_1^3 \pi e^{2x} dx \quad = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^3$$

$$= \pi \left[\frac{e^6}{2} - \frac{e^2}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} e^2 (e^4 - 1)$$

$$V = \frac{\pi e^2}{2} (e^4 - 1)$$

B කොටස

1. (*a*) $x^2 + px + q = 0$

$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q$

(i) $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 4$$

$$-p = 4q$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$12 = p^2 - 4q$$

$$p^2 + p - 12 = 0$$

$$(p+4)(p-3) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} p = -4 \\ q = 1 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} p = 3 \\ q = -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\}$$

(ii) $\alpha + \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{\alpha\beta + 2}{\beta} = \dfrac{q+2}{\beta}$

$$\beta + \frac{2}{\alpha} = \frac{\alpha\beta + 2}{\alpha} = \frac{q+2}{\alpha}$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{———————} \quad (1)$$

Let $y = \dfrac{q+2}{x}$

$$x = \frac{q+2}{y}$$

පළමු සමීකරණයේ x වෙනුවට $\dfrac{q+2}{y}$ යෙදීමෙන් (1),

$$\left(\frac{q+2}{y}\right)^2 + p\left(\frac{q+2}{y}\right) + q = 0$$

$$(q+2)^2 + p(q+2)y + qy^2 = 0$$

$$qy^2 + p(q+2)y + (q+2)^2 = 0$$

$\alpha + \dfrac{2}{\beta}, \beta + \dfrac{2}{\alpha}$ මූල වන සමීකරණය

$$qx^2 + p(q+2)x + (q+2)^2 = 0$$

(b) Let $y = \dfrac{x^2+3x-4}{5x-k}$

$$x^2 + (3-5y)x + (ky-4) = 0$$
$$\Delta = (3-5y)^2 - 4(ky-4)$$
$$= 25y^2 - (4k+30)y + 25$$

තාත්ත්වික x සඳහා $\Delta \geq 0$

i.e $25y^2 - (4k+30)y + 25 \geq 0$

y සියලු අගයන් සඳහා $25y^2 - (4k+30)y + 25$

(i) හි සංගුණකය $y^2 = 25 > 0$ සහ

(ii) $\Delta_1 = (4k+30)^2 - 4\times 25\times 25 \leq 0$

$$(4k+30)^2 - 50^2 \leq 0$$
$$(4k-20)(4k+80) \leq 0$$
$$(k-5)(k+20) \leq 0$$
$$-20 \leq k \leq 5$$

k=-5

$$f(x) = \frac{(x+4)(x-1)}{5(x+1)}$$

(1) $x = 0$ විට $f(x) = -\dfrac{4}{5}$

(2) $y = 0$ විට -4, 1

(3) $x =$ -1 යනු ස්පර්ශෝන්මුඛයකි

(4) $f(x) = -\dfrac{(x+4)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{5\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ $\longrightarrow \infty,\ x \longrightarrow \infty$

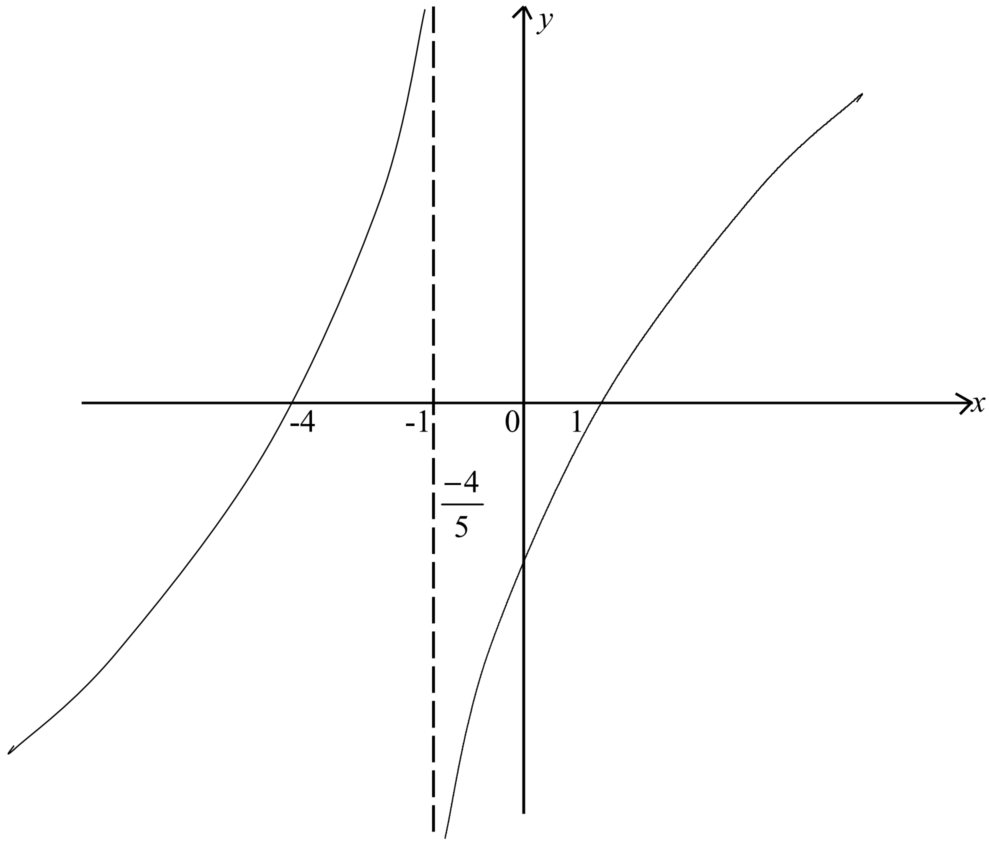
$\longrightarrow -\infty,\ x \longrightarrow -\infty$

(5) $x < -4$, $f(x) < 0$

$-4 < x < -1$, $f(x) > 0$

$-1 < x < 1$, $f(x) < 0$

$x > 1$, $f(x) > 0$



02. $f(x) = \lambda^2 x^2 - (\lambda^2 - 2\lambda)x + 3 = 0$

$$\alpha + \beta = \frac{\lambda^2 - 2\lambda}{\lambda^2}$$

$$\alpha\beta = \frac{3}{\lambda^2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda}{\lambda^2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{\lambda^2}}{\frac{3}{\lambda^2}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(\lambda^2 - 2\lambda)^2 - 6\lambda^2}{3\lambda^2} = \frac{4}{3}$$

$$3\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 18\lambda^2 = 12\lambda^2$$

$$3\lambda^4 - 12\lambda^3 - 18\lambda^2 = 0$$

$$6r + 2 = 0$$

$\lambda^2 - 12 \leq 0$

$\left(\lambda + 2\sqrt{3}\right)\left(\lambda - 2\sqrt{3}\right) \leq 0$

$-2\sqrt{3} \leq \lambda \leq 2\sqrt{3}$

$-3.42 \leq \lambda \leq 3.42$

λ හි උපරිම නිඛිල අගය 3 කි.

(b) $\displaystyle\sum_{r=1}^{2n}(-1)^{r+1}\frac{1}{r} = \sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{r}$

$n=1$, විට ව : පැ L.H.S $\displaystyle = \sum_{r=1}^{2}(-1)^{r+1}\frac{1}{r}$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ද : පැ $\displaystyle = \sum_{r=2}^{2}\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$

ව : පැ = ද : පැ

$n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$$\sum_{r=1}^{2p}(-1)^{r+1}\frac{1}{r} = \sum_{r=p+1}^{2p}\frac{1}{r}$$

එනම් $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ... - \frac{1}{2p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + ... + \frac{1}{2p}$

$n = p+1$ විට, $\displaystyle\sum_{r=1}^{2(p+1)}(-1)^{r+1}\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ... - \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2}$

$$= \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + ... + \frac{1}{2p}\right) + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2}$$

$$= \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + ... + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} + \frac{1}{p+1}$$

$$= \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + ... + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$$

$$= \sum_{r=p+2}^{2(p+1)}\frac{1}{r}$$

එනම් $n = p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යහන මූලධර්මයට අනුව සියළු ධන නිඛිල සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

03. (a) $\dfrac{2r+3}{r(r+1)} = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r+1}$

$$= \frac{A(r+1)+Br}{r(r+1)}$$

$$= \frac{(A+B)r+A}{r(r+1)}$$

$$2r+3 = (A+B)r + A$$

$$A = 3,\ B = -1 \qquad \frac{2r+3}{r(r+1)} = \frac{3}{r} = \frac{1}{r+1}$$

$$Ur = \frac{2r+3}{r(r+1)} \times \frac{1}{3^r}$$

$$= \left[\frac{3}{r} - \frac{1}{r+1}\right] . \frac{1}{3^r}$$

$$= \left[\frac{1}{r} . \frac{1}{3^{r-1}} - \frac{1}{r+1} . \frac{1}{3^r}\right] = V_r - V_{r+1}$$

$$V_r = \frac{1}{r.3^{r-1}}$$

$$\underline{U_r = V_r - V_{r+1}}$$

$$u_1 = v_1 - v_2$$

$$u_2 = v_2 - v_3$$

$$u_3 = v_3 - v_4$$

....

$$u_{n-1} = v_{n-1} - v_n$$

$$\underline{u_n = v_n - v_{n+1}}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} . \frac{1}{3^n}$$

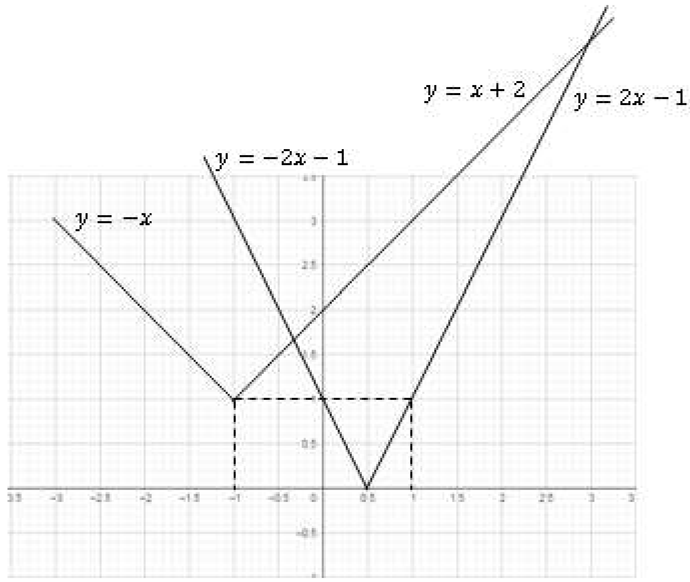
$n \to \alpha$ විට $\dfrac{1}{n+1} . \dfrac{1}{3^n} \to 0$

$$\lim_{n \to \alpha} \sum_{r=1}^{n} U_r = 1$$

එනම් ශ්‍රේණිය අභිසාරි වන අතර $\displaystyle\sum_{r=1}^{\alpha} U_n = 1$

(b)
$$y = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = |x+1|+1 = \begin{cases} x+2, & x \geq -1 \\ -x, & x < -1 \end{cases}$$



$y = x+2$
$y = -2x+1$
$x+2 = -2x+1$
$3x = -1$
$x = -\frac{1}{3}$

$y = x+2$
$y = 2x-1$
$x+2 = 2x-1$
$x = 3$

$|2x-1| - |x+1| \geq 1$

$|2x-1| \geq 1 + |x+1|$

$\therefore$ විසඳුම $x \geq 3$ සහ $x \leq -\frac{1}{3}$

04.(a)(i) ගැහැනු ළමයින් 6දෙනෙකු එක කණ්ඩායමක් ලෙස සැලකූ විට 7 දෙනා පේළියක තැබිය හැකි ආකාර ගණන $7!$ වේ. කණ්ඩායම තුළ ගැහැනු ළමයින් 6 දෙනා තැබිය හැකි ආකාර ගණන 61 වේ. අවශ්‍ය ආකාර ගණන $7!\times 6!$ වේ.

$$=5040\times 720$$
$$=3628800$$

(ii) G G G G G G ———————— (1)

  ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

  G G G G G G ———————— (2)

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

ගැහැනු ළමයින් 6 දෙනා වාඩි කරවිය හැකි ආකාර $6!$ වේ.

ඉහත ආකාර දෙකට පිරිමි ළමයින් 6 දෙනා තැබිය හැකි ය.

එනම් පිරිමි ළමයින් 6 දෙනා වැඩි කරවිය හැකි ආකාර $6!$ වේ.

එනම් අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 2\times 6!\times 6!$

$$=2\times 720\times 720$$
$$=1036800$$

(a) 0, 2, 3, 5, 7, 8

$$\boxed{*\quad *\quad *\quad *}$$

(i) $=5\times 6\times 6\times 6=1080$

එනම් සංඛ්‍යා 1080ක් සෑදිය හැකි ය.

(ii) එක ඉලක්කමක් එක වරක් පමණක් වේ.

සංඛ්‍යා ගණන $=5\times 5\times 4\times 3=300$

5000 වඩා වැඩි 2න් බෙදෙන සංඛ්‍යා ගණන.

* * * | 0 | ——0න් අවසන් වන $3\times 4\times 3\times 1=36$

| 2 | ——2න් අවසන් වන $3\times 4\times 3\times 1=36$

| 8 | ——8න් අවසන් වන $2\times 4\times 3\times 1=24$

මුළු ගණන $=36+36+24=96$

$c)$ $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots + {}^nC_rx^r + \ldots + {}^nC_nx^n$

$(x+1)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2} + \ldots + + {}^nC_rx^{n-r} + \ldots + {}^nC_n$

xට සාපේක්ෂ ව අවකලනය කිරීමෙන්

(1) $n(1+x)^{n-1} = {}^nC_1 + 2.{}^nC_2x + \ldots + r.{}^nC_rx^{r-1} + \ldots + n.{}^nC_nx^{n-1}$

(2) $n(x+1)^{n-1} = n.{}^nC_0x^{n-1} + (n-1){}^nC_1x^{n-2} + \ldots + (n-r){}^nC_rx^{n-r-1} + 1.{}^nC_{n-1}$

$(1)\times(2)$ සැලකීමෙන්

$n^2(1+x)^{2n-2} = \left({}^nC_1 + \ldots + n.{}^nC_nx^{n-1}\right)\left(n.{}^nC_0x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\right)$

දකුණු පස x^{n-2} හි සංගුණකය

x^{n-2}

$= (n-1)^nC_1^2 + 2(n-2)^nC_2^2 + \ldots + r(n-r)^nC_{r1}^2 + \ldots + (n-1)^nC_n^2$

වම් පස x^{n-2} හි සංගුණකය් $n^2.{}^{2n-2}C_{n-2}$ වේ.

එනයින් ප්‍රතිඵලය

(3) හි $x=1$ යොදමු.

$n^2.2^{2n-2} = \left({}^nC_1 + 2.{}^nC2_1 + \ldots + n.{}^nC_n\right)\left(n.{}^nC_0 + \ldots + 1.{}^nC_{n-1}\right)$

$n^2.2^{2n-2} = \sum_{r=1}^{n} r.{}^nC_r . \sum_{r=0}^{n-1}(n-r).{}^nC_r$

05. (a) $Z^3 = 1$

$(Z-1)\left(Z^2 + Z + 1\right) = 0$

$Z - 1 = 0$ or $Z^2 + Z + 1 = 0$

$Z = 1$

$Z\dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$Z = 1$ or $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ or $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$Z^3 - 1 = 0$ හි සංකීර්ණ මූලයක් ω නම්

$\omega^3 - 1 = 0$

$(\omega - 1)\left(\omega^2 + \omega + 1\right) = 0$

$\omega \neq 1$ එම නිසා $1+\omega+\omega^2=0$

(i) $1+\omega=-\omega^2$

$$\frac{1}{1+\omega}=-\frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{\omega}{1+\omega}=-\frac{1}{\omega}$$

(ii) $1+\omega^2=-\omega$

$$\frac{1}{1+\omega^2}=-\frac{1}{\omega}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega^2+1}=-\omega$$

(iii) $\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{3k}+\left(-\frac{\omega^2}{1+\omega}\right)^{3k}$

$$=\left(-\frac{1}{\omega}\right)^{3k}+(-\omega)^{3k}$$

$$=(-1)^{3k}\left[\frac{1}{\left(\omega^3\right)^k}+\left(\omega^3\right)^k\right]$$

$$=(-1)^{3k}\left[1+1\right]$$

$$=(-1)^{3k}.2$$

k ඔත්තේ සිට, $(-1)^{3k}.2=-2$

k ඉරට්ටේ සිට, $(-1)^{3k}.2=2$

(b) $u=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

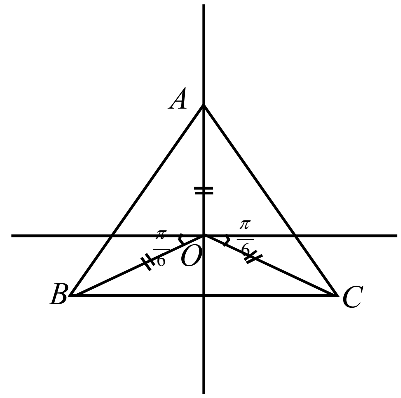
$$v=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$uv=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{u}{v}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$



$OA = OB = OC$

පහසුවෙන් ම

$B\hat{A}C = A\hat{B}C = A\hat{C}B = 60^0$ බව පෙන්විය හැක.
එනම් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.

06. (a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1}$

$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}\right)^{4n+1}$$

$$=\left(\frac{2i}{2}\right)^{4n+1}=i^{4n+1}=\left(i^4\right)^n i=i$$

$$x^3-1=0$$

$$(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$$

$$x=1,\qquad x^2+x+1=0, x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=1,\qquad x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=1,\qquad x=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$x=1,\qquad \omega,\omega^2$$

තවද, $1+\omega+\omega^2=0,\quad \omega^3=1$

$(x+2)^3=1;\quad y^3=1;\quad y=1,\omega,\omega^2$

$x+2 = y$

$$x+2=1,\quad x+2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x+2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=-1,\quad x=-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x=-\frac{5}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(2+5\omega+2\omega^2\right)^6=\left(2+2\omega+2\omega^2+3\omega\right)^6$$
$$=\left(3\omega\right)^6=3^6.\omega^6=729$$

$$\left(p-q\right)\left(p\omega-q\right)\left(p\omega^2-q\right)$$
$$=\left(p-q\right)\left[p^2\omega^3-pq\omega^2-pq\omega+q^2\right]$$
$$=\left(p-q\right)\left(p^2+pq+q^2\right)=p^3-q^3$$

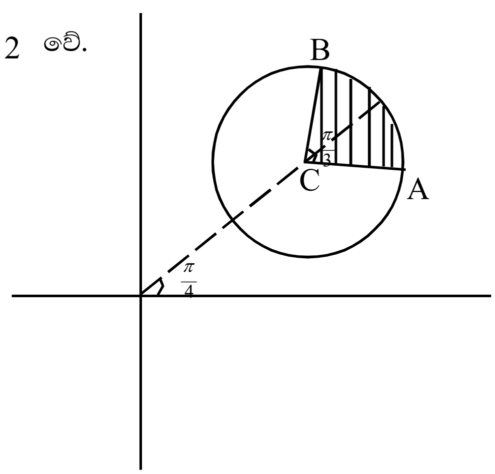
$$\omega\left(b+c\omega+a\omega^2\right)=b\omega+c\omega^2+a\omega^3$$
$$=a+b\omega+c\omega^2$$
$$\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}=\omega$$

(b) $\quad |Z-3-3i|=2$

P හි පථය කේන්ද්‍රය $(3, 3)$ හා අරය 2 වූ වෘත්තයකි.

පථයේ කාටීසිය සමීකරණය $(x-3)^2+(y-3)^2=2^2$

ප්‍රදේශය තුළ $|Z|$ හි විශාලතම අගය $3\sqrt{2}+2$ වේ.



07. (a) $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^2 x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 2x-\cos^2 x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}-2.\frac{\sin^2 2x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2\times 4\times\frac{\sin^2 2x}{\left(2x\right)^2}$$
$$=1-8\times 1$$
$$=-7$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-2\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 2\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x}\left(\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}\right) \times \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} \times \frac{2\sin\frac{3x}{2}}{x} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} \times \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} \times \frac{2\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3x}{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}} \times \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= 2\times 2\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times 1 = 3$$

(b) $\quad y = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad Z = \sec^{-1} x \qquad \left(x > \sqrt{2}\right)$

$\sin y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x = \sec z$

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{\sec z^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 z}} = \cot z$$

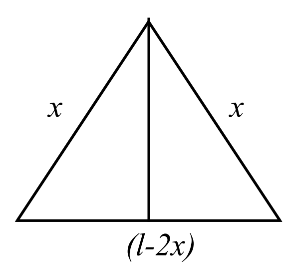
$$\cos y.\frac{dy}{dz} = -\cos ec^2 z$$

නම් $x > \sqrt{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < z < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{1-\sin^2 y}.\frac{dy}{dz} = -\left(1+\cot^2 z\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2-1}}.\frac{dy}{dz} = -\left(1+\frac{1}{\tan^2 z}\right)$$

$$\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}.\frac{dy}{dz} = -\frac{\sec^2 z}{\sec^2 z - 1} = -\frac{x^2}{x^2-1}$$



$$\frac{dy}{dz} = -\frac{x^2}{x^2-1} \times \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-2}}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-x^2}{\sqrt{\left(x^2-2\right)\left(x^2-1\right)}}$$

$$\frac{dy}{dz} + \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2-2\right)\left(x^2-1\right)}} = 0$$

(ii) $$\frac{dy}{dz} + \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)}} = 0$$

(c) වර්ගඵලය $A = \left(\frac{l}{2} - x\right)\sqrt{x^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}$

$$= \left(\frac{l}{2} - x\right)\sqrt{lx - \frac{l^2}{4}}$$

$$\frac{dA}{dx} = \left(\frac{l}{2} - x\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{lx - \frac{l^2}{4}}} \times l + \sqrt{lx - \frac{l^2}{4}}\,(-1)$$

$$= \frac{\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \left(lx - \frac{l^2}{4}\right)}{\sqrt{lx - \frac{l^2}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{l^2}{2} - \frac{3lx}{2}}{\sqrt{lx - \frac{l^2}{4}}}$$

$$= \frac{-3l}{2\sqrt{lx - \frac{l^2}{4}}}\left(x - \frac{l}{3}\right)$$

$\frac{l}{4} < x < \frac{l}{3}$, $\frac{dA}{dx} > 0$ A වැඩි වේ.

$x > \frac{l}{3}, \quad \frac{dA}{dx} < 0 \quad A$ අඩුවේ.

එනම් $x = \frac{l}{3}$ විට A ට උපරිමයක් පවතින අතර ත්‍රිකෝණය සමපාද වේ.

වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times \frac{l}{3} \times \frac{l}{3} \times \sin 60$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{l}{3} \times \frac{l}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{36}$$ වර්ග ඒකක

08. (*a*) (i) $f(x) = \sin 2x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(2x+h)\mathrm{sinh}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2\cos(2x+2h)\frac{\mathrm{sinh}}{h}$$

$$= 2\cos 2x . \times 1 = 2\cos 2x$$

(ii) $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) = 2^n \sin\left[\frac{n\pi}{2} - 2x\right]$

n=1 විට

වා: පා: $= \frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

දා: පා: $= 2sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\cos 2x$

n=1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$$\frac{d^p}{dx^p}(\sin 2x) = 2^p.\sin\left(\frac{p\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left[2^p.\sin\left(\frac{p\pi}{2} - 2x\right)\right]$$

$$= 2^{p}.\cos\left(\frac{p\pi}{2} - 2x\right) \times (-2)$$

$$= 2^{p+1}\left[-\cos\left(\frac{p\pi}{2} - 2x\right)\right]$$

$$= 2^{p+1}.\sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{p\pi}{2} - 2x\right)\right]$$

$$= 2^{p+1}.\sin\left[(p+1)\frac{\pi}{2} - 2x\right]$$

එනම් $n = p+1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යුහන මූල ධර්මයට අනුව සියලු n ධණ නිඛිල සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

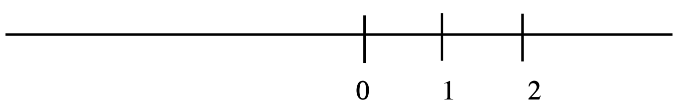
(b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x(x-2)}$

$$f'(x) = \frac{-(2x-2)}{x^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{-2(x-1)}{x^2(x-2)^2}$$

$x = 1$, විට $f'(x) = 0$

$x = 0$ හා $x = 2$ යනු ස්පර්ශෝන්මුඛ වේ.



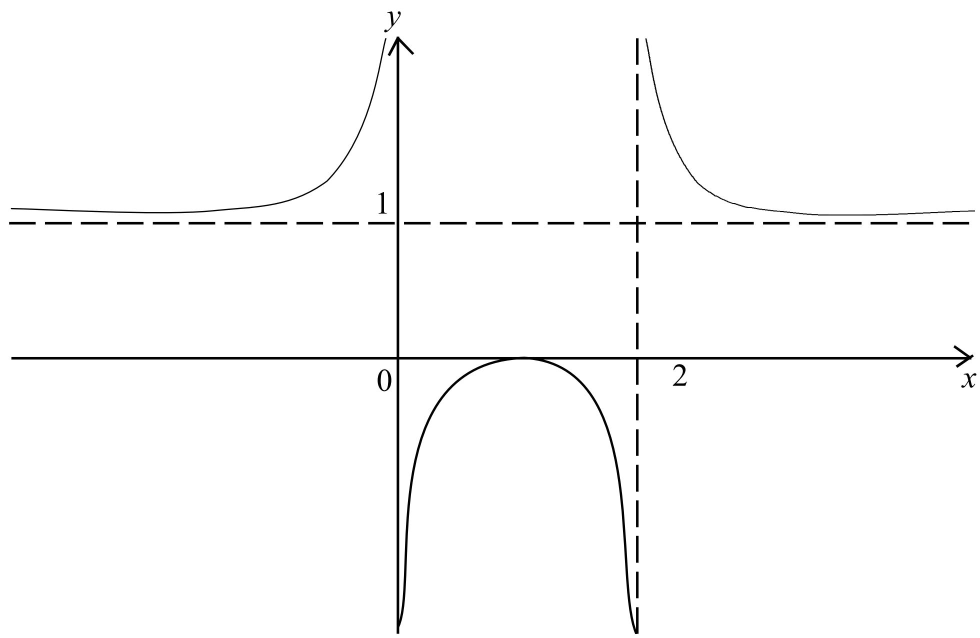
$x < 0$	$f'(x) > 0$	f වැඩි වේ.
$0 < x < 1$	$f'(x) > 0$	f වැඩි වේ.
$i < x < 2$	$f'(x) < 0$	f අඩු වේ.
$x > 2$	$f'(x) < 0$	f අඩු වේ.

$x = 1$, f උපරිම වන අතර $f(1) = 0$ වැඩි වේ..

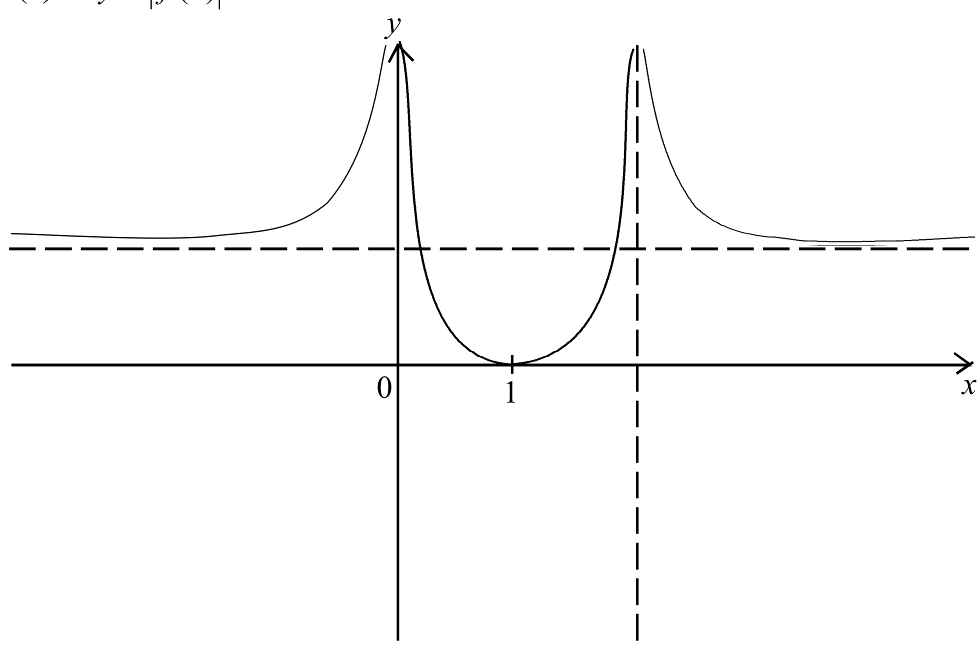
$f(x) \to 1$ $x \to \pm\infty$ විට

$y = 1$ ස්පර්ශෝන්මුඛයකි.

(i) $y = f(x)$



(ii) $y = |f(x)|$



$$f(x) = 1 + \frac{1}{x(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x(x-2)}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$x \to \pm\alpha;$ විට $f(x) \to 1$ $x \to \pm\infty$ විට $\dfrac{1}{f(x)} \to 1$

$x = 0, 2$ විට $\dfrac{1}{f(x)} = 0$

$x < 0$ විට $\dfrac{1}{f(x)}$ වැඩි වේ.

$0 < x < 1$ විට $\dfrac{1}{f(x)}$ වැඩි වේ.

එම නිසා $x > 1$ විට $\dfrac{1}{f(x)}$ අඩු වේ.

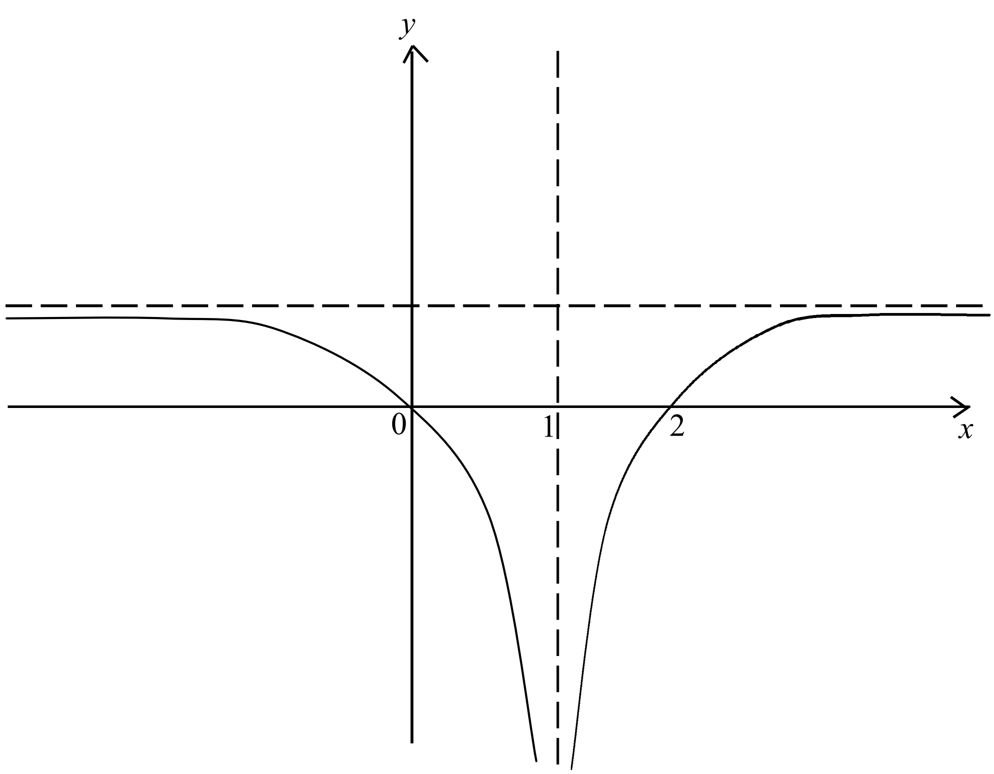
$f(x) = 0$

$x = 1$, විට $y = \dfrac{1}{f(x)}$

එම නිසා $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ස්පර්ශෝන්මුඛයකි.

$1 < x < 2,$ හා $x > 2$, විට $f(x)$ අඩු වේ.

එනම් $\dfrac{1}{f(x)}$ වැඩි වේ.



09. (a) $$\frac{1}{\left(1-x^2\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}+\frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$1=A(1+x^2)(1-x)+B(1+x)(1+x^2)+(Cx+D)(1+x)(1-x)$$

$x=1,\quad 1=4B,\quad B=\frac{1}{4}$

$x=-1,\quad 1=4A,\quad A=\frac{1}{4}$

$x=0,\quad 1=A+B+D,\quad D=\frac{1}{2}$

x^3 හි සංගුණකය $0=-A+B-C,\quad C=0$

$$\int\frac{1}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{1}{4\left(1+x\right)}dx+\int\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-x\right)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|1+x\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1-x\right|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$$

(b) $t=\sin x-\cos x$

$t^2=\left(\sin x-\cos x\right)^2=1-\sin 2x$

$\sin 2x=1-t^2$

$t=\sin x-\cos x \qquad x:0\to\frac{\pi}{4}$

$\frac{dt}{dx}=\cos x+\sin x \qquad t:-1\to 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{9+16(1-t^2)}$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{(5-4t)(5+4t)}$$

$$=\int_{-1}^{0}\left\{\frac{A}{(5-4t)}+\frac{B}{(5+4t)}\right\}dt$$

$5A+5B=1$

$4A-4B=0$

$A=\frac{1}{10},B=\frac{1}{10}$

$$= \frac{1}{10}\int_{-1}^{0}\frac{dt}{(5-4t)} + \frac{1}{10}\int_{-1}^{0}\frac{dt}{(5+4t)}$$

$$= \frac{-1}{40}\ln|5-4t| + \frac{1}{40}\ln|5+4t|$$

$$= \frac{1}{40}\left[\ln\left|\frac{5+4t}{5-4t}\right|\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{40}\left[\ln 1 - \ln\frac{1}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{40}\ln 9$$

(c) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx, \quad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{a\cos x + b\sin x}dx$

$$aI + bJ = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos x + b\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx = [x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$bI - aJ = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{b\cos x - a\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx$$

$$= \left[\ln|a\cos x + b\sin x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln\left|\frac{b}{a}\right|$$

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{\pi a}{2} + bln\left|\frac{b}{a}\right|\right]$$

$$J = \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{\pi b}{2} - aln\left|\frac{b}{a}\right|\right]$$

10. (a) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x dx}{1+\cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$2\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$u = \cos x$ යොදමු.

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$x : 0 \to \pi$

$u : 1 \to -1$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{+du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1} u\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right]$$

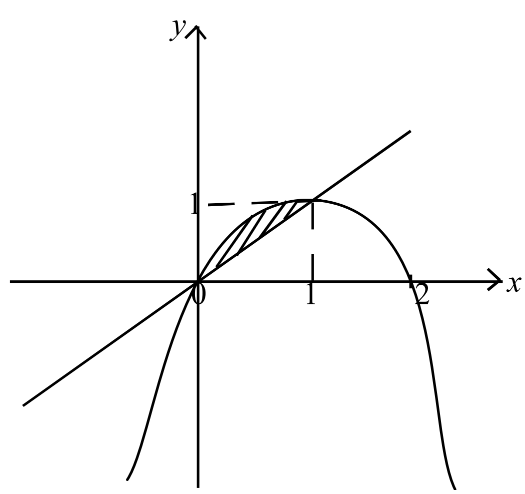
$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

(b) $\int \frac{x.e^x}{(1+x)^2}dx$

$$= \int x.e^x.\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$u = x.e^x$ $\qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$

$$v = \frac{-1}{(1+x)}$$



$$\int \frac{x.e^x}{(1+x)^2}dx = x.e^x\,\frac{-1}{(1+x)} - \int \frac{-1}{(1+x)}.e^x(x+1)dx$$

$$= \frac{-x.e^x}{1+x} + \int e^x\,dx$$

$$= \frac{-x.e^x}{1+x} + e^x$$

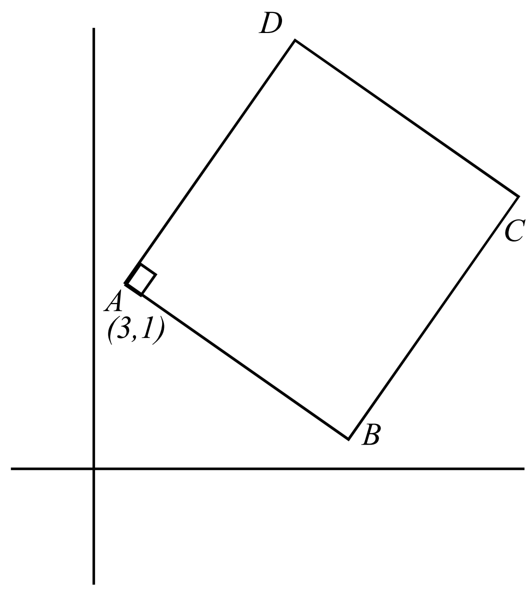
$$= \frac{e^x}{1+x}$$

(*c*) $y = x(2-x)$

$$= -\left(x^2 - 2x\right)$$

$$= -\left[x^2 - 2x + 1 - 1\right]$$

$$y = -(x-1)^2 + 1$$



$$x(2-x) = x$$

$$x(2-x) - x = 0$$

$$x(1-x) = 0$$

$$x = 0,1$$

වර්ගඵලය $= \int_0^1 \left(2x - x^2\right)dx - \int_0^1 x\,dx$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$= \frac{1}{6}$ ව. ඒකක

11. (*a*) AD : $x + y - 4 = 0$

AC : $3x - y - 8 = 0$

$A \equiv (3,1)$

AB හි සමීකරණය

$$(y + x - 4) + \lambda(y - 3x + 8) = 0$$

$$(1 - 3\lambda)x + (1 + \lambda)y + (8\lambda - 4) = 0$$

AB හි අනුක්‍රමණය $= \dfrac{3\lambda - 1}{\lambda + 1}$

AD හි අනුක්‍රමණය $= -1$

AB හි අනුක්‍රමණය $= 1 = \dfrac{3\lambda - 1}{\lambda + 1}$

$\lambda = 1$

එවිට ABහි සමීකරණය $= x - y - 2 = 0$

$B \equiv (x_0, y_0)$ යැයි ගනිමු.

$\dfrac{y_0 - 1}{x_0 - 3} = 1$

$\dfrac{y_0 - 1}{1} = \dfrac{x_0 - 3}{1}$ $(= t$ යැයි ගනිමු$)$

$(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$t^2 + t^2 = 8$

$2t^2 = 8$

$t^2 = 4$

$t = \pm 2$

$t = 2,$ විට $B \equiv (5, 3)$

$t = -2,$ විට $B \equiv (+1, -1)$

B පළමු වෘත්ත පාදයේ නිසා

$B \equiv (5, 3)$

BCහි සමීකරණය $y + x = k \quad (AD \,//\, BC)$

$5 + 3 = k$

$k = 8$

එම නිසා BC සමීකරණය $= y + x = 8$

$BD,\ x - 3y + 7 = 0$

BDහි සමීකරණය $= x - 3y + c = 0$

$5 - 9 + c = 0$

$c = 4$

BDහි සමීකරණය $=$ $x-3y+4=0$

BD : $x-3y+4=0$
AD : $x+y-4=0$
$D \equiv (2,2)$

CDහි සමීකරණය $=$ $x-y=k$
$2-2=k$
$k=0$

CDහි සමීකරණය $=$ $x-y=0$

(b) $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$
S: $(2,0),(0,-1)$
$4+0+4g+0+c=0$
$0+1+0-2f+c=0$

$4+4g+c=0$
$1-2f+c=0$

$$g=\frac{-(c+4)}{4}, \quad f=\frac{c+1}{2}$$

$$S \equiv x^2+y^2-\frac{2(c+4)}{4}x+\frac{2(c+1)}{2}y+c=0$$
$$2x^2+2y^2-(c+4)x+2(c+1)y+2c=0$$

වෘත්තයේ සාධාරණ සමීකරණයෙන්

$$S \equiv x^2+y^2-\left(\frac{\lambda+4}{2}\right)x+(\lambda+1)y+\lambda=0$$

(1, -1) හරහා යන නිසා

$$1+1-\left(\frac{\lambda+4}{2}\right)-(\lambda+1)+\lambda=0$$

$\lambda=-2$

(i) S_1 හි සමීකරණය $=x^2+y^2-x-y-2=0$

කේන්ද්‍රය $= C_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(ii) $S_2 \equiv x^2 + y^2 - \left(\frac{\lambda+4}{2}\right)x + (\lambda+1)y + \lambda = 0$ මගින් $S_1 = 0$

සමච්ඡේදනය වන නිසා

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ පොදු ජ්‍යාය $S_1 - S_2 = 0$

$$\left(\frac{\lambda+4}{2} - 1\right)x - (\lambda+2)y - (\lambda+2) = 0$$

$$(\lambda+2)x - 2(\lambda+2)y - 2(\lambda+2) = 0$$

පොදු ජ්‍යාය $S_2 = 0$ හි කේන්ද්‍රය හරහා යන නිසා

S_2 කේන්ද්‍රය $\left(\frac{\lambda+4}{4}, \frac{-(\lambda+1)}{2}\right)$

$$(\lambda+2)\left(\frac{\lambda+4}{4}\right) + 2(\lambda+2)\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) - 2(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda(\lambda+2) = 0$$

$\lambda = 0$ හා $\lambda = -2$ විට

$\lambda = -2$ විට $S_2 \equiv S_1$

$\lambda = 0$, විට $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + y = 0$

(iii) $x^2 + y^2 - \left(\frac{\lambda_1+4}{2}\right)x + (\lambda_1+1)y + \lambda_1 = 0$ හා

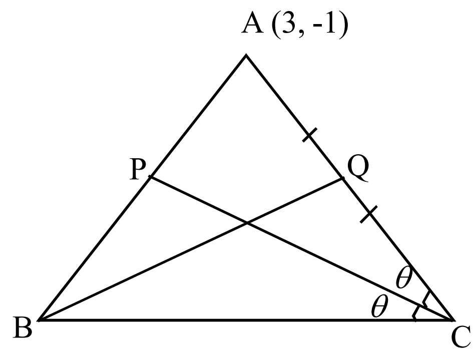
$x^2 + y^2 - \left(\frac{\lambda_2+4}{2}\right)x + (\lambda_2+1)y + \lambda_2 = 0$ ප්‍රලම්බ වේ.

කේන්ද්‍රයන් $C_1 \equiv \left(\frac{\lambda_1+4}{4}, -\frac{\lambda_1+1}{2}\right)$

$C_2 \equiv \left(\frac{\lambda_2+4}{4}, -\frac{\lambda_2+1}{2}\right)$

$$2\left(\frac{\lambda_1+4}{4}\right)\left(\frac{\lambda_2+4}{4}\right) + 2\left(\frac{\lambda_1+1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_2+1}{2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_1\lambda_2 = -4$$



12. (*a*) CPහි සමීකරණය $x-4y+10=0$

BQහි සමීකරණය $6x+10y-59=0$

$C,\ x-4y+10=0$ රේඛාව මත වේ.

$C\equiv\left(t,\dfrac{t+10}{4}\right),\quad A\equiv(3,-1)$

$Q\equiv\left(\dfrac{t+3}{2},\dfrac{t+6}{8}\right)$

Q, BQ මත නිසා $6x+10y-59=0$

$6\left(\dfrac{t+3}{2}\right)+10\left(\dfrac{t+6}{8}\right)-59=0$

$t=10$

$C\equiv(10,5)$

ACහි අනුක්‍රමණය $\dfrac{6}{7}$

CP හි අනුක්‍රමණය $\dfrac{1}{4}$

BC හි අනුක්‍රමණය m නම්

$$\left|\frac{m-\frac{1}{4}}{1+\frac{m}{4}}\right|=\left|\frac{\frac{6}{7}-\frac{1}{4}}{1+\frac{6}{7}\times\frac{1}{4}}\right|$$

$$\left|\frac{4m-1}{4+m}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$\frac{4m-1}{4+m}=\pm\frac{1}{2}$$

$m=\dfrac{6}{7}$ හෝ $-\dfrac{2}{9}$

BC හි සමීකරණය $y-5=-\dfrac{2}{9}(x-10)$

$$2x+9y-65=0$$

ACහි සමීකරණය $y+1=\dfrac{6}{7}(x-3)$

$$6x-7y-25=0$$

$BC: 2x+9y-65=0$

$BQ: 6x+10y-59=0$

$B \equiv \left(-\frac{7}{2}, 8\right)$

ACට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය $7x+6y+c=0$

ආකාර වේ. මෙය B හරහා යයි $B \equiv \left(-\frac{7}{2}, 8\right)$

එවිට, $7 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 6 \times 8 + c = 0$

$c = \frac{-47}{2}$

එනම්, අවශ්‍ය සමීකරණය $14x+12y-47=0$

(*b*) $S_3 = 0$ හි සමීකරණය

$\left(3x^2+3y^2-6x-1\right)+\lambda\left(x^2+y^2+2x-4y+1\right)=0$

$S_1 = 0$ හි කේන්ද්‍රය $(1, 0)$

$S_3 = 0$, $(1, 0)$ හරහා යයි

$\left(3+0-6-1\right)+\lambda\left(1+0+2-0+1\right)=0$

$\lambda = 1$

$S_3 = 0$

$\left(3x^2+3y^2-6x-1\right)+\lambda\left(x^2+y^2+2x-4y+1\right)=0$

$4x^2+4y^2-4x-4y=0$

$x^2+y^2-x-y=0$

$S_2 = 0 \qquad g=1 \qquad f=-2 \qquad c=1$

$S_3 = 0 \qquad g' = -\frac{1}{2} \qquad f' = -\frac{1}{2} \qquad c' = 0$

$2gg' + 2ff' = 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1+2=1$

$c+c' \quad = \quad 1+0 \quad = \quad 1$

$2gg' + 2ff' = c + c'$

$S_3 = 0$ හා $S_2 = 0$ ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ.

$(1, 0)$ යනු $S_1 = 0$හි කේන්ද්‍රය යි.

(x_1, y_1) හි දී,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$(1, 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී

$x^2 + y^2 - x - y = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය

$$x \times 1 + y \times 0 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y+0) = 0$$

$$x - \frac{x+1}{2} - \frac{y}{2} = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

AB සමීකරණය

$$y - 8 = \left(\frac{-1-8}{3+\frac{7}{2}}\right)\left(\lambda + \frac{7}{2}\right)$$

$$y - 8 = \frac{9 \times 2}{13}\left(\lambda + \frac{7}{2}\right)$$

$$13y - 104 = -18x - 63$$

$$18x + 13y - 41 = 0$$

13. (*a*)(i) $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$

$$\left(2\sin x-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)-\left(1-\cos^2 x\right)=0$$
$$(1+\cos x)\Big[\left(2\sin x-\cos x-\left(1-\cos x\right)\right]=0$$
$$(1+\cos x)\left(2\sin x-1\right)=0$$

$\cos x+1=0$ හෝ $2\sin x-1=0$

$\cos x=-1$ $\qquad\sin x=\dfrac{1}{2}$

$x=2n\pi\pm\pi, n\in\mathbb{Z}$ $\qquad x=n\pi+\left(-1\right)^n\dfrac{\pi}{6}; n\in\mathbb{Z}$

(ii) $2\tan x+\sec 2x=2\tan 2x$

$$2\tan x+\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$$
$$2\tan x\left(1-\tan^2 x\right)+\left(1+\tan^2 x\right)=4\tan x$$
$$2\tan x-2\tan^3 x+1+\tan^2 x=4\tan x$$
$$2\tan^3 x-\tan^2 x+2\tan x-1=0$$
$$\tan^2 x\left(2\tan x-1\right)+1\left(2\tan x-1\right)=0$$
$$\left(\tan^2 x+1\right)\left(2\tan x-1\right)=0$$

$\tan^2 x+1\neq 0;$ $\quad\tan x=\dfrac{1}{2}$

$$x=n\pi+\alpha\left[\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\quad n\in Z$$

(*b*) $2\cos^2\theta-2\cos^2 2\theta$

$$=\left(1+\cos 2\theta\right)-\left(1+\cos 4\theta\right)$$
$$=\cos 2\theta-\cos 4\theta$$

$\theta=36^0$ විට

$$2\cos^2 36^0-2\cos^2 72^0=\cos 72^0-\cos 144^0$$
$$2\left(\cos 36^0-\cos 72^0\right)\left(\cos 36+\cos 72\right)=\cos 72^0-\cos 144^0$$

$$\cos 36^0-\cos 72^0=\frac{\cos 72^0-\cos 144^0}{2\left(\cos 36^0+\cos 72^0\right)}$$

$$= \frac{2\sin 108^0 \sin 36^0}{4\cos 54^0 \cos 18^0}$$
$$= \frac{2\cos 18^0 \cos 54^0}{4\cos 54^0 \cos 18^0} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 36 - \cos 72 = \frac{1}{2}$$
$$\cos 36 = x$$
$$x - \left(2x^2 - 1\right) = \frac{1}{2}$$
$$2x - 4x^2 + 2 = 1$$
$$4x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$\cos 36^0 > 0$ නම්

$$\cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 72 = \cos 36 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2} \quad = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

(c) (i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ $(= k$ යැයි ගනිමු.)

$$\frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A}$$

$$= \frac{k^2\left(\sin^2 A - \sin^2 B\right)}{\cos A + \cos B} + \frac{k^2\left(\sin^2 B - \sin^2 C\right)}{\cos B + \cos C} + \frac{k^2\left(ain^2 C - \sin^2 A\right)}{\cos C + \cos A}$$
$$= \frac{k^2\left(\cos^2 B - \cos^2 A\right)}{\cos A + \cos B} + \frac{k^2\left(\cos^2 C - \cos^2 B\right)}{\cos B + \cos C} + \frac{k^2\left(\cos^2 A - \cos^2 C\right)}{\cos C + \cos A}$$
$$= k^2\left(\cos B - \cos A\right) + k^2\left(\cos C - \cos B\right) + k^2\left(\cos A - \cos C\right) = 0$$

(ii) $$\frac{a}{\sin 45^0} = \frac{b}{\sin 75^0} = \frac{c}{\sin 60^0} = t \quad \text{(say)}$$

$$a + \sqrt{2}c - 2b$$

$$= t\sin 45^0 + \sqrt{2}t\sin 60^0 - 2t\sin 75^0$$
$$= t\left[\sin 45^0 + \sqrt{2}\sin 60^0 - 2\sin 75^0\right]$$
$$= t\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= t\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right] = 0$$

$$a + \sqrt{2}c - 2b = 0$$
$$a + \sqrt{2}c = 2b$$

14. (*a*) (i) $$2(\cos x + \cos 2x) + \sin 2x(1 + 2\cos x) = 2\sin x$$

$$2(\cos x + \cos 2x) + 2\sin x\cos x(1 + 2\cos x) - 2\sin x = 0$$
$$2(\cos x + \cos 2x) + 2\sin x(\cos x + 2\cos^2 x - 1) = 0$$
$$(\cos x + \cos 2x) + \sin x(\cos x + \cos 2x) = 0$$
$$(1 + \sin x)(\cos x + \cos 2x) = 0$$

$\sin x + 1 = 0$ $\qquad$ $\cos x + \cos 2x = 0$

$\sin x = -1$ $\qquad$ $2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 0$

$x = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\cos\frac{x}{2} = 0$ or $\cos\frac{3x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{3x}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x = 4n\pi \pm \pi$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{3}(4n \pm 1)$

$x = \pm\pi$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{3}, -\pi$

විසඳුම් වනුයේ : $\pm\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi$ $\qquad$ $\left[-\pi < x \le \pi\right]$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)=A$, $\quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=B$

$\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=C$, $\quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=D$

$A\text{-}B = C\text{-}D$

$\tan(A-B)=\tan(C-D)$

$$\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{\tan C-\tan D}{1+\tan C\tan D}$$

$$\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{(x-1)(x+1)}}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}{1+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2}{x^2}=\frac{4}{18}$$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

$\because 2<x<4, \quad x=3$

(b) $$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{(1-m)}=\frac{\cos(\theta-\alpha)}{(1+m)}$$

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)}{2}=\frac{\cos(\theta-\alpha)-\sin(\theta+\alpha)}{2m}$$

$$m\left[\sin(\theta+\alpha)+\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\theta-\alpha)\right]\right]=\left[\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\theta-\alpha)\right]-\sin(\theta+\alpha)\right]$$

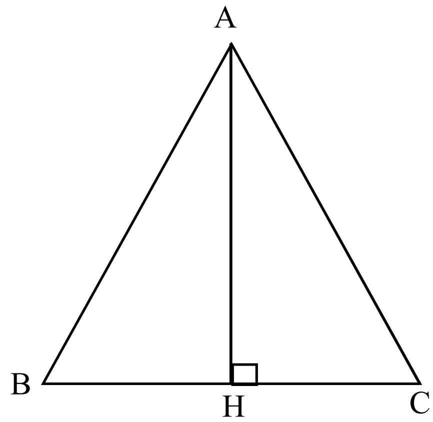
$$m\times 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$m\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=m.\cot\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=m.\cot\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

(*c*) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$



(i) $(b+c)^2 - a^2$

$= (b^2 + 2bc + c^2) - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)$

$= 2bc(1 + \cos A)$

$= 4bc.\cos^2 \dfrac{A}{2}$ ———— (1)

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2} bc.\sin A = \dfrac{1}{2} a.p$

$bc.\sin A = a.p$ ———— (2)

(1) හා (2) න්

$$(b+c)^2 - a^2 = 4bc.\cos^2 \frac{A}{2}$$

$$= \frac{4ap}{\sin A}.\cos^2 \frac{A}{2}$$

$$= \frac{4ap}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.\cos^2 \frac{A}{2}$$

$$= 2ap\cot\frac{A}{2}$$

$$(b+c)^2 = a^2 + 2ap.\cot\frac{A}{2}$$

(ii) $a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 + 2a^2b^2 = 2a^2b^2$

$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$

$a^2 + b^2 - c^2 = \pm ab\sqrt{2}$

$\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{\pm ab\sqrt{2}}{2ab} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c = \dfrac{\pi}{4}$ or $\dfrac{3\pi}{4}$

15. (*a*) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

දැන් $A^2 - 5A + 7I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 7I = 0$$

$$7I = 5A - A^2 \qquad\qquad 7I = 5A - A^2$$

$$= A(5I - A) \qquad\qquad = (5I - A)A$$

$$I = A.\frac{1}{7}(5I - A) \qquad\qquad I = \frac{1}{7}(5I - A)A$$

එනයින් $A^{-1} = \dfrac{1}{7}(5I - A)$

$$= \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$BA = C$

$(BA)A^{-1} = CA^{-1}$

$B(AA^{-1}) = CA^{-1}$

$$B = CA^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(*b*) $x - y = a$ .... (1)

$x + y = b$ .... (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

A X = B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{[1-(-1)]}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$
$$A^{1}AX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$y = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$A^{2}X = B$$

$$A^{1}A^{2}X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

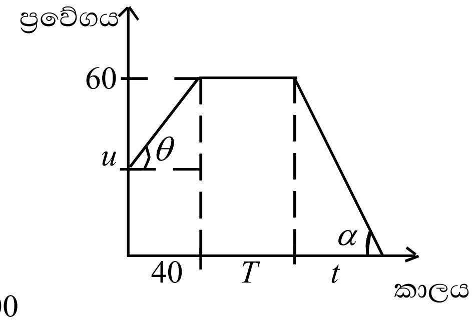
$$p = \frac{b}{2}$$

$$q = -\frac{a}{2}$$

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) සංයුක්ත ගණිතය II

A කොටස පිළිතුරු

01. $\tan\theta = 1 = \frac{60-u}{40}$



$u = 20ms^{-1}$

$\tan\alpha = \frac{1}{2} = \frac{60}{t}$

$t = 120$

ගිය දුර *10000 m*

$\frac{1}{2}[60+u]\times 40 + 60\times T + \frac{1}{2}\times 60\times t = 10000$

$80\times 20 + 60T + 30\times 120 = 10000$

$T = 80S$

02. $OA = t_1, \quad AB = t_2$

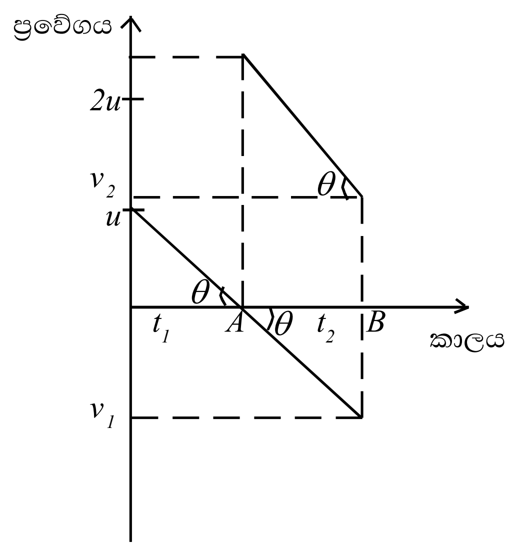
$\tan\theta = g = \frac{u}{t_1}, \quad t_1 = \frac{u}{g}$

$\tan\theta = g = \frac{v_1}{t_2}, \quad t_2 = \frac{v_1}{g}$

$\tan\theta = g = \frac{2u - v_2}{t_2}, \quad v_2 = 2u - gt_2$

A විස්ථාපනය $= \frac{1}{2}ut_1 - \frac{1}{2}v_1 t_2$

B විස්ථාපනය $= \frac{1}{2}(2u + v_2)t_2$



$\frac{1}{2}u.t_1 - \frac{1}{2}v_1.t_2 = \frac{1}{2}(2u+v_2)t_2$

$u.t_1 - v_1.t_2 = (2u+v_2)t_2$

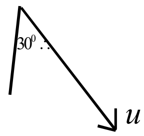
$u.t_1 = (2u + v_1 + v_2)t_2$

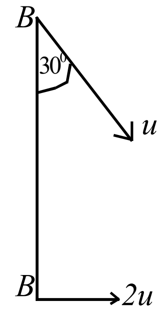
$u.\frac{u}{g} = (2u + gt_2 + 2u - gt_2)t_2$

$t_2 = \frac{u}{4g}$

03. $V_{A,E} = \rightarrow 2u$

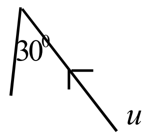
$V_{B,E} =$

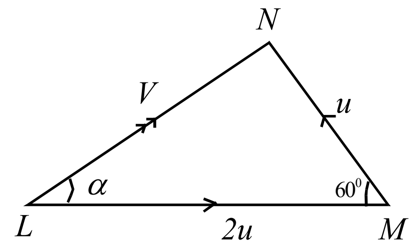




$V_{A,B} = V_{A,E} + V_{E,B}$

$V = \xrightarrow[2u]{} +$





$$v^2 = LN^2 = (2u)^2 + (u)^2 - 2 \times 2u \times u.\cos 60$$

$$= 3u^2$$

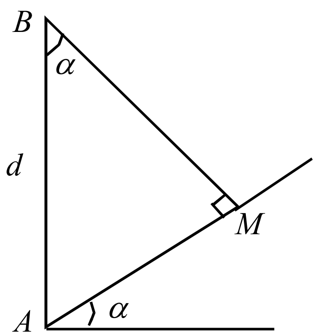
$$V = \sqrt{3}u$$

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin 60}$$

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}u \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^0$$



කෙටි ම දුර $= d\cos\alpha = d\cos 30 = \dfrac{\sqrt{3}d}{2}$

ගත වූ කාලය $= \dfrac{d\sin 30}{v} = \dfrac{d}{2\sqrt{3}u}$

04. $x + 2y =$ නියතයක්

$\dot{x} + 2\dot{y} = 0$

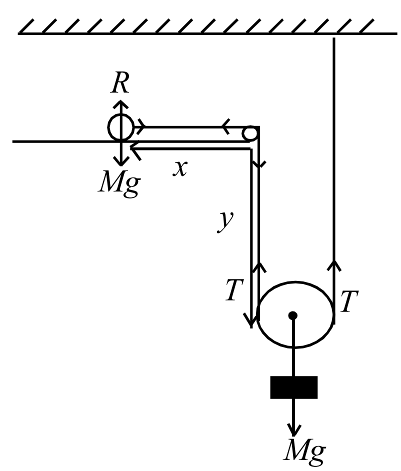
$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$

$\ddot{y} = a$ ලෙස සලකමු. $\ddot{x} = -2a$

$\therefore$ m හි ත්වරණය $AM_1E = \downarrow a$

$Am_1E = \rightarrow 2a$

m අංශුවට $F = ma$



$M \downarrow, \quad Mg - 2T = Ma$ ——— (1)

$\xrightarrow[m]{}, \quad T = m(2a)$ ——— (2)

$a = \dfrac{M_g}{4M + m}, \quad T = \dfrac{2Mmg}{M + 4m}$

05. $\underline{r} = a\cos nt\,\underline{i} + b\sin nt\,\underline{j}$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} = -an\sin nt\,\underline{i} + bn\cos nt\,\underline{j}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{f} = -an^2\cos nt\,\underline{i} - bn^2\sin nt\,\underline{j} = -n^2\left[a\cos nt\,\underline{i} + b\sin nt\,\underline{j}\right]$$

$\underline{v}$ හා $\underline{f}$ අබිලම්භය $\underline{v}.\underline{f} = 0$

$$a^2n^3\cos nt\sin nt - b^2n^3\sin nt\cos nt = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)n^3\sin 2nt = 0$$

$t = \dfrac{k\pi}{2n}$; මෙහි $k = 0,1,2,3...$

$$\underline{V}..\underline{V} = a^2n^2\sin^2 nt + b^2n^2\cos^2 nt$$

$$= n^2\left[a^2\sin^2 nt + b^2\cos^2 nt\right]$$

$$\underline{r}.\underline{r} = a^2\cos^2 nt + b^2\sin^2 nt$$

$$a^2 + b^2 - \underline{r}.\underline{r} = a^2\sin^2 nt + b^2\cos^2 nt$$

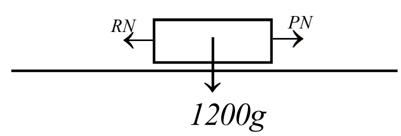
$$\underline{V}..\underline{V} = n^2\left(a^2 + b^2 - \underline{r}.\underline{r}\right)$$

06. නියත වේගයෙන් කාර් රථය ධාවනය වන බැවින් එහි ත්වරණය ශූන්‍ය වේ.

$F = ma$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow P - 600 = 1200 \times 0$

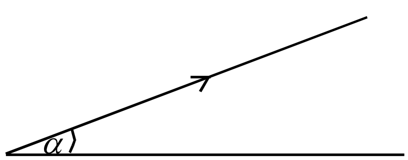
$P = 600N$

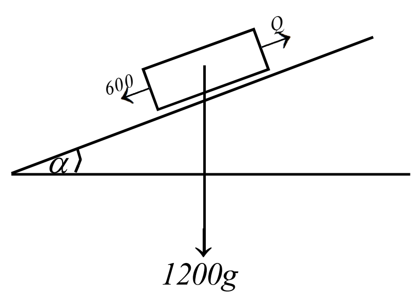


ක්ෂමතාව $= 600 \times \dfrac{20}{3} = 4000$ Watts.

$= 4kW$

$F = ma$ යෙදීමෙන්





$$Q - 600 - 1200 \times 10\sin\alpha = 1200a$$

$$Q = 600 + 1200 \times 10 \times \frac{1}{24} + 1200a$$

$$= \left(1200a + 1100\right)$$

$Q \times 20 = 30 \times 1000$

$(1200a + 1100) \times 20 = 30 \times 1000$

$$a = \frac{1}{3} ms^{-2}$$

07. ජලයේ ප්‍රවේගය Vms^{-1} ලෙස සලකමු.

$\frac{100}{100 \times 100} \times V = \frac{1}{10}$

$V = 10ms^{-1}$

නකාර්ය කිරීමේ ශීඝ්‍රතාව ක්ෂමතාව

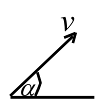
බැවින් $= \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

ක්ෂමතාව $= \frac{1}{2}(0.1 \times 1000) \times 10^2 + (0.1 \times 1000) \times 10 \times 12$

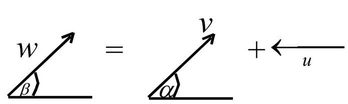
$= 17000$ W

$= 17kW$

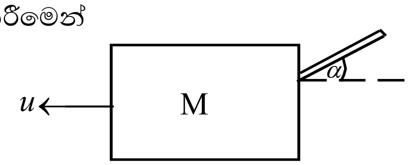
08. Let $V_{M,E} = \leftarrow u$

$V_{m,M} =$ 

$V_{m,E} = V_{m,M} + V_{M,E}$



m හා M සඳහා ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය භාවිත කිරීමෙන්

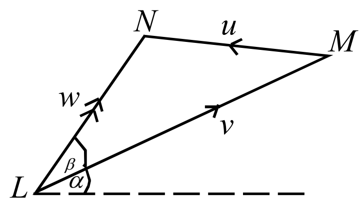


(M, m) $\leftarrow$

$Mu - m(v\cos\alpha - u) = 0$

$u = \frac{mv\cos\alpha}{M + m}$

තිරස් ගම්‍යතා උණ්ඩය සාදන කෝණය නම්



$$\frac{v}{\sin(180-\beta)} = \frac{u}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{v}{\sin\beta} = \frac{mv\cos\alpha}{(M+m)\sin(\beta-\alpha)}$$

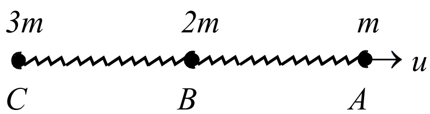
$$(M+m)\sin(\beta-\alpha) = m\sin\beta\cos\alpha$$

$$(M+m)\left[\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha\right] = m\sin\beta\cos\alpha$$

$$M\sin\beta\cos\alpha = (M+m)\cos\beta\sin\alpha$$

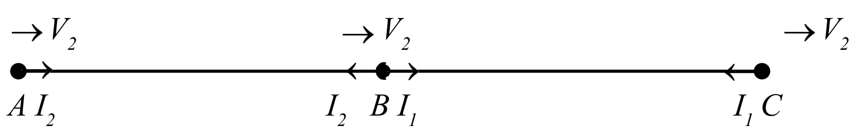
$$\tan\beta = \frac{M+m}{M}\tan\alpha$$

09.



$$\rightarrow mv_1 + 2mv_1 = mu$$

$$v_1 = \frac{u}{3}$$



A, B ,C සඳහන් ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\rightarrow mv_2 + 2mv_2 + 3mv_2 = mv_1 + 2mv_1 = mu$$

$$v_2 = \frac{u}{6}$$

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

A ට , $\rightarrow -I_1 = m(V_2 - V_1)$

$$= m\left(\frac{u}{6} - \frac{u}{3}\right)$$

$$I_1 = \frac{mu}{6}$$

C ට, $\rightarrow + I_2 = 3m(V_2 - V_0)$

$$= m\left(\frac{u}{6} - 0\right)$$

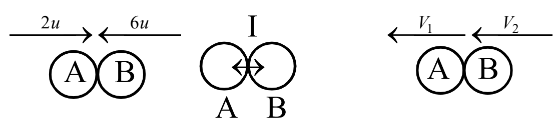
$$I_1 = \frac{3mu}{6}$$

$$I_2 : I_1 = 3:1$$

$\therefore$ හානි වූ ශක්තිය $= \frac{1}{2}mu^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{u}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{u}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}3m\left(\frac{u}{6}\right)^2\right]$

$\therefore$ හානි වූ ශක්තිය $= \frac{5}{12}mu^2$

10.



පද්ධතිය සඳහා $I = \Delta mv$ යෙදවීමෙන්

$\leftarrow m(v_1 - 2u) + 4m(v_2 - 6u) = 0 \qquad \therefore mv_1 + 4mv_2 = 4m \times 6u - m \times 2u$

$v_1 + 4v_2 = 22u$ ——————————— (1)

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන්

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{2}(6u + 2u)$$

$$v_1 - v_2 = 4u$$

$v_2 = \frac{18u}{5}$ ——————————— (2)

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

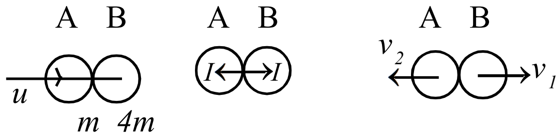
$\xleftarrow{B}, \qquad -I_1 = 4m(v_2 - 6u)$

$$= 4m\left(\frac{18u}{5} - 6u\right)$$

$$I = \frac{48mu}{5}$$

$$\frac{48mu}{5}$$

11.



පද්ධතියට $I = \Delta mv$ භාවිතයෙන්

$\rightarrow m(v_2 - u) + 4m(v_1 - 0) = 0 \qquad \therefore 4mv_1 - mv_2 = mu$

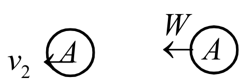
$4v_1 - v_2 = u$ ———— (1)

$v_1 + v_2 = eu$ ———— (2)

$$v_1 = \frac{(1+e)u}{5}, \quad v_2 = \frac{(4e-1)u}{5}$$

$v_2 > 0$ නම් $e > \frac{1}{4}$ ———— (3)

බිත්තියේ ගැටුමට පසු Bහි වේගය W.



$$W = ev_1 = \frac{4}{5}\left(\frac{1+e}{5}\right)u$$

දෙවන ගැටුම සිදුවීමට $W > V_2$

$$\frac{4}{5} = \left(\frac{1+e}{5}\right)u > \frac{4e-1}{5}u$$

$4(1+e) > 5(4e-1)$

$e < \frac{9}{16}$ ———— (4)

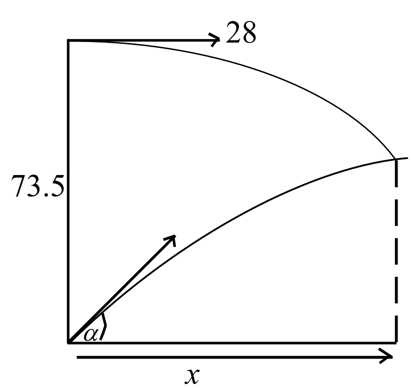
(3) සහ (4) $\frac{1}{4} < e < \frac{9}{16}$

12. ගැටුමට ගත වූ කාලය t ලෙස සලකමු.

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

Aහි චලිතයට,

$\longrightarrow \qquad x = 28t$



Bහි චලිතයට,

$\longrightarrow \qquad x = 35\cos\alpha t$

$35\cos\alpha = 28$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ ——————————— } (1)$$

A සඳහා, $h_1 = 0 + \frac{1}{2}gt^2$

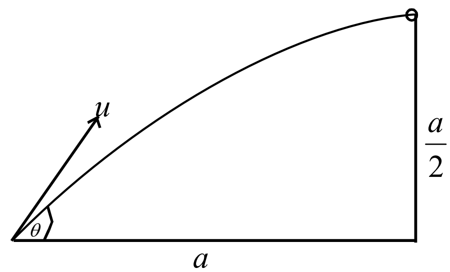
B සඳහා, $h_2 = 35\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

$\downarrow \quad h_1 + h_2 = 35\sin\alpha . t$

$\uparrow \quad 73.5 = 35 \times \frac{3}{5} \times t$

$t = 3.5\, s$

13. $S = ut + \frac{1}{2}at^2$



$u = \sqrt{2ag}$

$\longrightarrow$

$$a = u\cos\theta t \text{ ——————————— } (1)$$

$\uparrow \quad \frac{a}{2} = u\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$

(1)න්, $t = \frac{a}{u\cos\theta}$

$$\frac{a}{2} = a\tan\theta - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{a}{2} = a\tan\theta - \frac{a}{4}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

$$\tan^2\theta - 4\tan\theta + 3 = 0$$

$$(\tan\theta - 3)(\tan\theta - 1) = 0$$

$\tan\theta = 3$ - $\tan\theta = 1$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

A සඳහා, $\longrightarrow \quad a = u\cos\theta_1 . t_1$

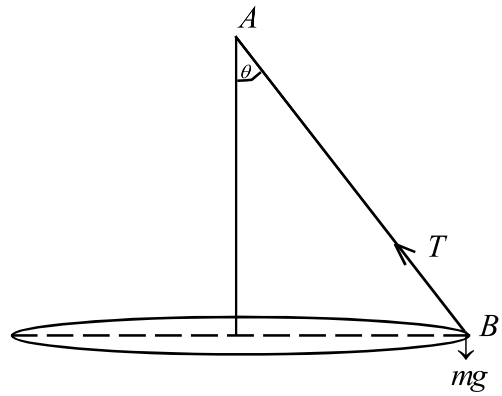
B සඳහා, $\longrightarrow \quad a = u\cos\theta_2 . t_2$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$t_1 : t_2 = 1 : \sqrt{5}$$

14. Let $AB = l$

දිග $= a$, $\lambda = 2mg$



$$T = \frac{2mg(l-a)}{a}$$

$F = ma$ යෙදීමෙන්

$\overset{\text{B}}{\longleftarrow}$, $T\sin\theta = ml\sin\theta.\left(\frac{3g}{4a}\right)$

$$T = \frac{3mgl}{4a} \text{ ——— (1)}$$

(1) සහ (2)

$$\frac{2mg(l-a)}{a} = \frac{3mgl}{4a}$$

$$l = \frac{8a}{5} \text{ ——— (2)}$$

විතතිය $\frac{8a}{5} - a = \frac{3a}{5}$

$\uparrow$ $F = ma$

$$T\cos\theta - mg = m \times 0$$

$$T\cos\theta = mg$$

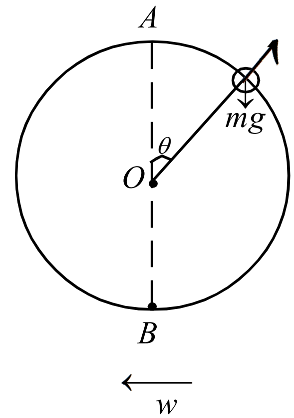
$$\frac{6mg}{5}\cos\theta = mg$$

$$\cos\theta = \frac{5}{6}$$

15. සමස්ත ශක්තිය

Aහි දී ශක්තිය $=$ Bහි දී ශක්තිය

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{constant}\right)$$



$$O + mga = \frac{1}{2}mw^2 - mga$$

$$w^2 = 4ag = 4 \times 10 \times 0.6$$

$$w^2 = 24$$

$$w = 2\sqrt{6}ms^{-1}$$

$F = ma$ යෙදීමෙන්

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a}$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} \quad \text{———} \quad (1)$$

සමස්ත ශක්තිය

$$O + mga = \frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta$$

$$v^2 = 2ag(1 - \cos\theta)$$

(1) සහ (2)

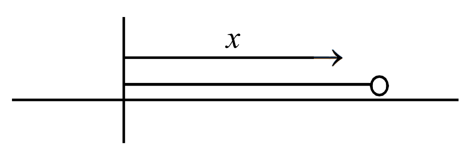
$$R = mg(3\cos\theta - 2)$$

$$R = 0, \quad \cos\theta = \frac{2}{3}$$

කේන්ද්‍රයේ සිට උස $= 0.6\cos\theta = 0.6 \times \frac{2}{3}$

$$= 0.4m$$

16. $\ddot{x} = -\omega^2 x$



$$v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)$$

නම් $x = 0.9, \quad v = 1.2$

$x = 1.2, \quad v = 0.9$

$$1.2^2 = \omega^2\left(a^2 - 0.9^2\right) \quad \text{———} \quad (1)$$

$$0.9^2 = \omega^2\left(a^2 - 1.2^2\right) \quad \text{———} \quad (2)$$

$$(1) \div (2),\quad \frac{1.2^2}{0.9^2} = \frac{a^2 - 0.9^2}{a^2 - 1.2^2}$$

$$a^2\left(1.2^2 - 0.9^2\right) = 1.2^4 - 0.9^4$$

විස්තාරය $= 1.5m$

$$\omega^2\left(1.5^2 - 0.9^2\right) = 1.2^2$$

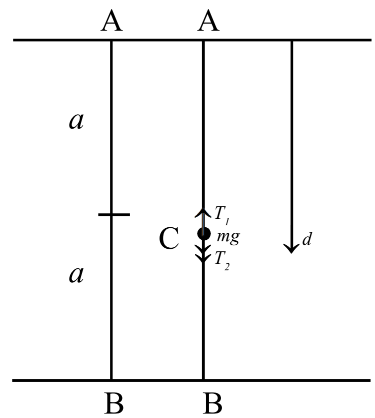
$$\omega^2 = 1$$

$$\omega = 1$$

දෝලන කාලය $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ Sec

17. සමතුලිතතාවයේ $AC = d,\quad \lambda = mg$

අංශුවේ සමතුලිතතාවට



$$\downarrow,\quad T_2 + mg - T_1 = 0$$

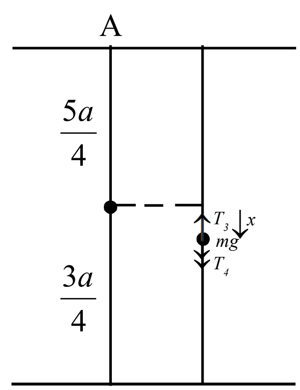
$$\frac{2mg}{a}\left(2a - d - \frac{a}{2}\right) + mg - \frac{2mg}{a}\left(d - \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2}{a}\left(2a - d - \frac{a}{2}\right) + 1 - \frac{2}{a}\left(d - \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2}{a}\left(2a - d - \frac{a}{2} - d + \frac{a}{2}\right) + 1 = 0$$

$$d = \frac{5a}{4}, AM = \frac{5a}{4}, BM = \frac{3a}{4}$$

$F = ma$ යෙදීමෙන්



$$\downarrow\ T_4 + mg - T_3 = m\ddot{x}$$

$$\frac{2mg}{a}\left[\frac{3a}{4} - x - \frac{a}{2}\right] + mg - \frac{2mg}{a}\left[\frac{5a}{4} + x - \frac{a}{2}\right]$$

$$= m\ddot{x}$$

$$\frac{2g}{a}\left[\frac{3a}{4} - x - \frac{a}{2}\right] + g - \frac{2g}{a}\left[\frac{5a}{4} + x - \frac{a}{2}\right] = \ddot{x}$$

$$\therefore \frac{2g}{a}\left[\frac{3a}{4} - x - \frac{a}{2} - \frac{5a}{4} - x + \frac{a}{2}\right] + g = \ddot{x}$$

$$\frac{2g}{a}\left[-2x - \frac{a}{2}\right] + g = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{4g}{a}x$$

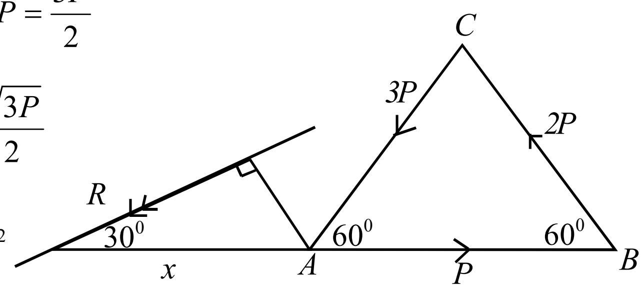
$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad \left[\omega^2 = \frac{4g}{a}\right]$$

කාලය $= \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{4g}} = \pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

18.

$\longleftarrow \quad X = 3P\cos 60 + 2P\cos 60 - P = \dfrac{3P}{2}$

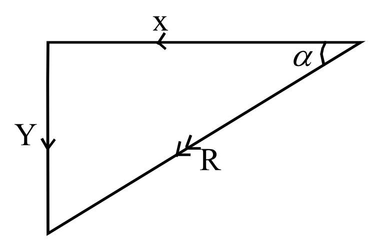
$\downarrow \quad Y = 3P\sin 60 - 2P\sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}P}{2}$



$$R^2 = \left(\frac{3P}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}P}{2}\right)^2 = 3P^2$$

$$R = \sqrt{3}P.N$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \alpha = 30^0$$



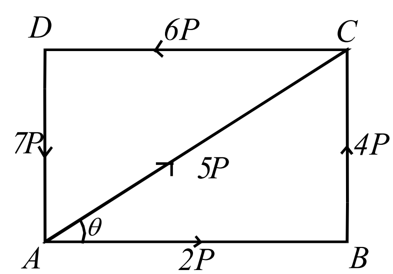
A වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

A වටා සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණයේ $=$ A වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය

$$R.x.\sin 30 = 2P.2a\sin 60$$

$$P\sqrt{3}\times x \times \frac{1}{2} = 2P \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

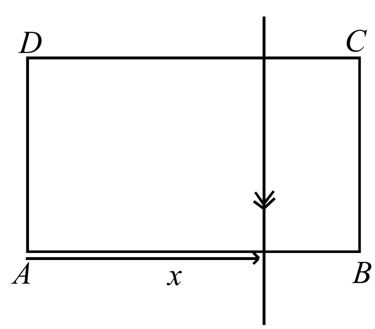
$$x = 4a$$



19. $\cos\theta = \dfrac{4}{5}, \quad \sin\theta = \dfrac{3}{5}$

$\longrightarrow \quad X = 2P - 6P + 5P\cos\theta$
$\qquad = 2P - 6P + 4P = 0$

$\uparrow \quad Y = 4P - 7P + 3P = 0$
$\qquad = 4P - 7P + 3P = 0$



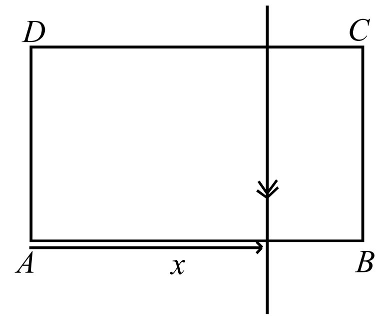
A වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

$G) = 4P\times 4a + 3P \times 3a = 34Pa$

$R = 0, \ G \neq 0$ බැවින් බල පද්ධතිය යුග්මයට ඌනනය වේ.

යුග්මයේ ඝූර්ණය $34Pa$

$4P$ බලය ඉවත් කළ විට නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය CB දිශාවේ $4PN$ වේ.

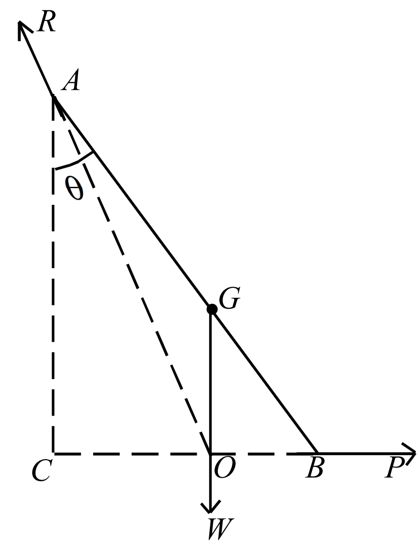


$=A$ වටා සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණය
$=A$ වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණය
$-4P.x=18Pa$
$\therefore$ සම්ප්‍රයුක්තය දික් කළ BA පාදය .

$$x=-\frac{9a}{2}$$

$\therefore A$ සිට $\dfrac{9a}{2}$ දුරකින් ඡේදනය කරයි.

20. දණ්ඩෙහි ක්‍රියාකාරක බල
(i) බර W
(ii) තිරස් බලය P
(iii) Aහි ප්‍රතික්‍රියාව



බල ත්‍රිකෝණය OAC සැලකීමෙන්

$R \longrightarrow OA$ (OA මඟින් R නිරූපණය වේ)
$W \longrightarrow AC$ (AC මඟින් w නිරූපණය වේ)
$P \longrightarrow CO$ (CO මඟින් P නිරූපණය වේ)

$$\tan\theta=\frac{3}{4}$$

$$\frac{R}{OA}=\frac{W}{AC}=\frac{P}{CO}$$

$AB=2a$ නම්

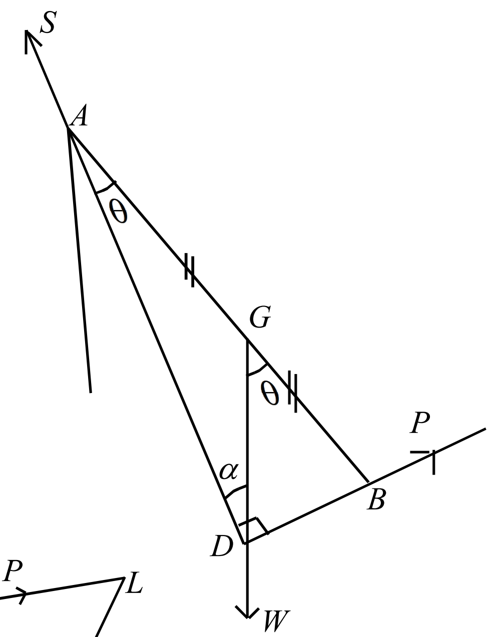
$$AC=2a\sin\theta=\frac{8a}{5}$$

$$CB=2a\sin\theta=\frac{6a}{5}$$

$$CO=\frac{3a}{5}$$

$$P=W.\frac{CO}{AC}=\frac{3W}{8}$$

AB හි සමතුලිතතාවට w, p, s එක ම ලක්ෂ්‍යය හරහා යා යුතු යි.



බල ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්
P අවමය විමට නම් P හා S ලම්බ විය යුතු ය.

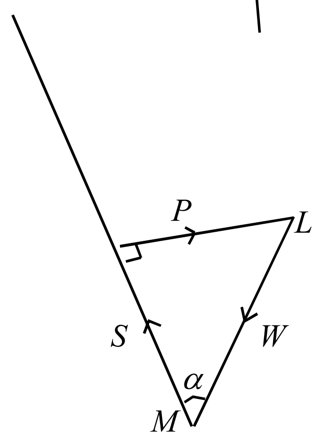
ADB ත්‍රිකෝණයේ

$AG = GB$, and $\angle ADB = 90^0$

$\therefore \ AG = GB = GD$

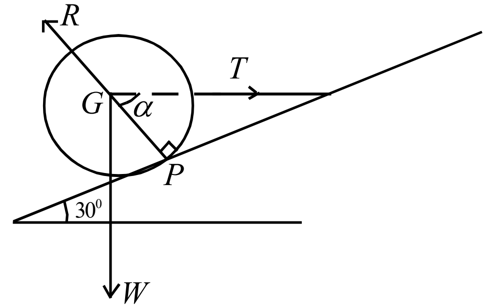
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$P = W\sin\alpha = W\sin\frac{\theta}{2}$$



21. ගෝලයේ සමතුලිතතාවට බල
(i) බර w G.
(ii) ප්‍රතික්‍රියාව R, P හි දී
(iii) ආතතිය T

සමතුලිතතාවී බල තුන Gහි දී
ඡේදනය වේ.
ලාමිගේ ප්‍රමේයය අනුව



$$\tan\alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතියෙන්,

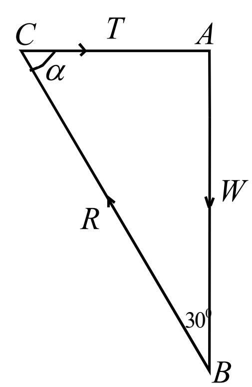
$$\frac{T}{\sin 30} = \frac{W}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(30+\alpha)}$$

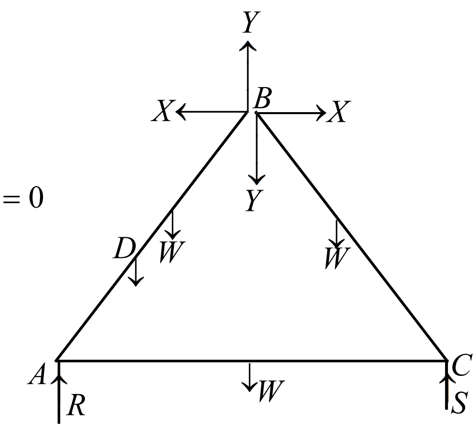
$$T = \frac{W\sin 30}{\sin\alpha} = \frac{5W}{8}$$

$$R = \frac{\sin(30+\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{W[\sin 30\cos\alpha + \cos 30\sin\alpha]}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{W}{8}\left(3 + 4\sqrt{3}\right)$$





22. ABහි සමතුලිතතාව සඳහා

$A) = 0$

$X.a\sin 60 + Y.a\cos 60 - W.\frac{a}{2}\cos 60 - W.\frac{a}{3}\cos 60 = 0$

$\sqrt{3}\times + Y = \frac{W}{2} + \frac{W}{3} = \frac{5W}{6}$

BCහි සමතුලිතතාව සඳහා

$C) = 0$

$-\hat{X}.a\sin 60 + Y.a\cos 60 - W.\frac{a}{2}\cos 60 = 0$

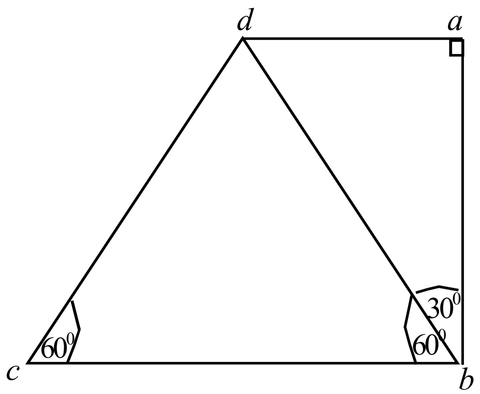
$-\sqrt{3}X + Y = -\frac{W}{2}$ ——(1)

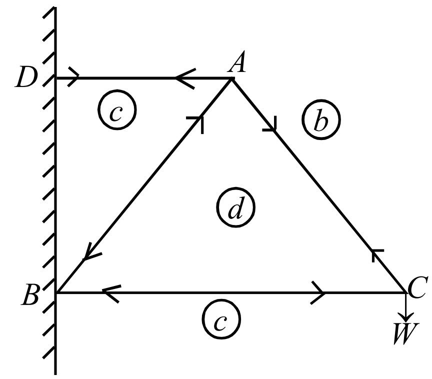
(1) හා (2) න් $Y = \frac{W}{6}$ $X = \frac{2W}{3\sqrt{3}}$

Bහි දී ප්‍රතික්‍රියාව $\sqrt{X^2 + Y^2}$

$= \frac{W\sqrt{57}}{18}$

23.





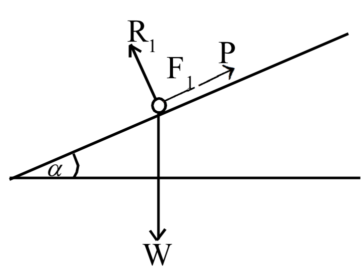
$ab \to W$

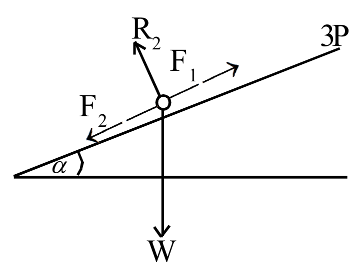
$ad \to W \tan 30 = \dfrac{W}{\sqrt{3}}$

$bd \to \dfrac{W}{\cos 30} = \dfrac{2W}{\sqrt{3}}$

$bd = bc = cd$

දණ්ඩ	ආතති	තෙරපුම්
BC	–	$\dfrac{W}{\sqrt{3}}$
AC	$\dfrac{2W}{\sqrt{3}}$	-
AB	–	$\dfrac{2W}{\sqrt{3}}$
AD	$\dfrac{2W}{\sqrt{3}}$	-





24. සමතුලිතතාව සඳහා

$F_1 + P - W \sin\alpha = 0$

$R_1 - W\cos\alpha = 0$

$F_1 = \mu R_1$

$W\sin\alpha - P = \mu W\cos\alpha$

සමතුලිතතාව සඳහා

$3P - F_2 - W\sin\alpha = 0$

$R_2 - W\cos\alpha = 0$

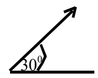
$F_2 = \mu R_2$

$3P - W\sin\alpha = \mu W \cos\alpha$ ——— (2)

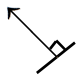
(1) හා (2)න් $P = \dfrac{W\sin\alpha}{2}$ ——— (1)

$2\mu = \tan\alpha$

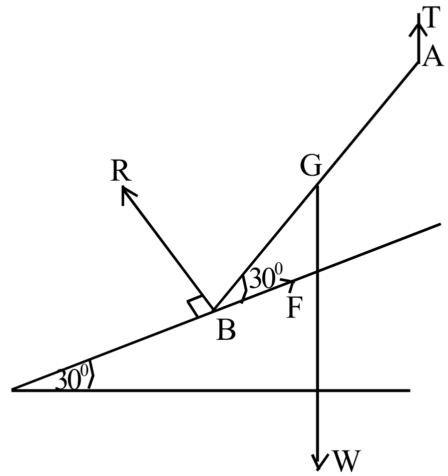
25. AB දණ්ඩේ සමතුලිතාව සඳහා



$$F + T\cos 60 - W\sin 30 = 0 \quad (1)$$



$$R + T\sin 60 - W\cos 30 = 0$$



B වටා ඝූර්ණය ශුන්‍ය වේ.

$$T.2a\cos 60 - Wa\cos 60 = 0$$

$$T = \frac{W}{2}$$

$$F = W\sin 30 - T\cos 60 = \frac{W}{4}$$

$$R = W\cos 30 - T\sin 60 = \frac{W\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{F}{R} \le \mu, \quad \mu \ge \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \mu \min \ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

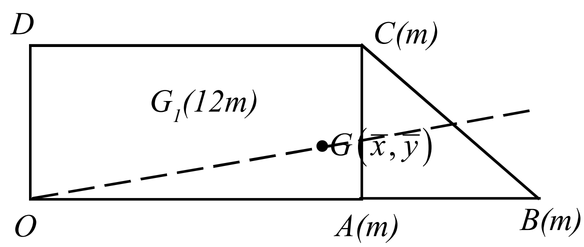
26. $OACD$ ඍජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= 2a^2$

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}a^2$

$OACD$ ඍජුකෝණාස්‍රයේ ස්කන්ධය $12m$ යැයි ගත් විට

ABC ත්‍රිකෝණයේ ස්කන්ධය $3m$

$G \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ යැයි ගනිමු.



OB වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$15m\bar{y} = 12m \times \frac{a}{2} + m \times a$$

$$\bar{y} = \frac{7a}{15}$$

OD වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$15m\bar{x} = 12m \times a + m \times 2a + m \times 2a + m \times 3a$$

$$\bar{x} = \frac{19a}{15}$$

OA තිරස සමඟ සාදන කෝණය β වේ. .

$$\tan\beta = \cot\alpha = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{19a}{7}$$

$$\tan\beta = \tan^{-1}\left(\frac{19}{7}\right)$$

27. $P(B') = \frac{2}{3},\quad P(AUB) = \frac{5}{8},\quad P\left(A/_B\right) = \frac{3}{4}$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = P(A|B).P(B) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B); \rightarrow P(A) = \frac{5}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{24}$$

$$P(A'\cup B') = P[(A\cap B)'] = 1 - P(A\cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

28. A හා B ස්වායත්ත වේ.

$$P(A\cap B) = P(A).P(B) = 0.3\times 0.4 = 0.12$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = P(A\cap B)$$

$$= 0.3 + 0.4 - 0.12$$
$$= 0.58$$

$$P(A'\cap B') = P\left[(A\cup B)'\right] = 1 - P(A\cup B)$$

$$= 1 - 0.58 = 0.42$$

P [දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව] $= \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

P [4න් 3ක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව] $= 4C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\frac{4}{5}$

$$= \frac{16}{625}$$

29. මධ්‍යනාසය $= \dfrac{7+11+5+8+13+12+11+9+14}{9}$

$$\bar{x} = \frac{90}{9} = 10$$

5 7 8 9 11 11 12 13 14

මධ්‍යස්ථය $= \dfrac{9+1}{2}$ වන අගය යි.

$= 5$ වැන්න $= 11$

සම්මත අපගමනය $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}\left(xi-\bar{x}\right)^2}{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25+9+4+1+1+1+4+9+16}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{70}}{9} = \sqrt{\frac{70}{3}} = 2.78$$

කුටිකතා සංගුණකය $= \dfrac{3\left(\text{මධ්‍යනාසය - මධ්‍යස් ථ ය}\right)}{\text{සම්මත අපගමනය}}$

$$= \frac{3\left(10-11\right)}{2.78}$$

$$= -1.04$$

30.

0	2	(1)
1	1 5 7 9	(4)
2	1 3 8 9	(4)
3	2 3 3 5 6 6 7 9 9 9 9	(11)
4	0 5 7 7 8 9	(6)
5	8	(1)
		27

2/3 යනු අවු. 23

(i) අවම අගය - අවුරුදු 02
උපරිම අගය - අවුරුදු 58
මාතය - අවුරුදු 39

(ii) Q_1 යනු $= \frac{1}{4}(27+1)^{th}$ වන අගය යි.

$= 7^{th}$ වැන්න $=$ අවුරුදු 23 යි.

මධ්‍යස්ථය

Q_2 යනු $= \frac{1}{2}(27+1)^{th}$ වන අගය යි.

$= 14$ වැන්න $=$ අවුරුදු 36 යි.

Q_3 යනු $= \frac{3}{4}(27+1)$ වන අගය යි.

$= 21$ වන අගය $=$ අවුරුදු 40 යි.

(iii) $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1) = 23 + 1.5(40-23)$

$= 23 + 25.5 = -2.5$

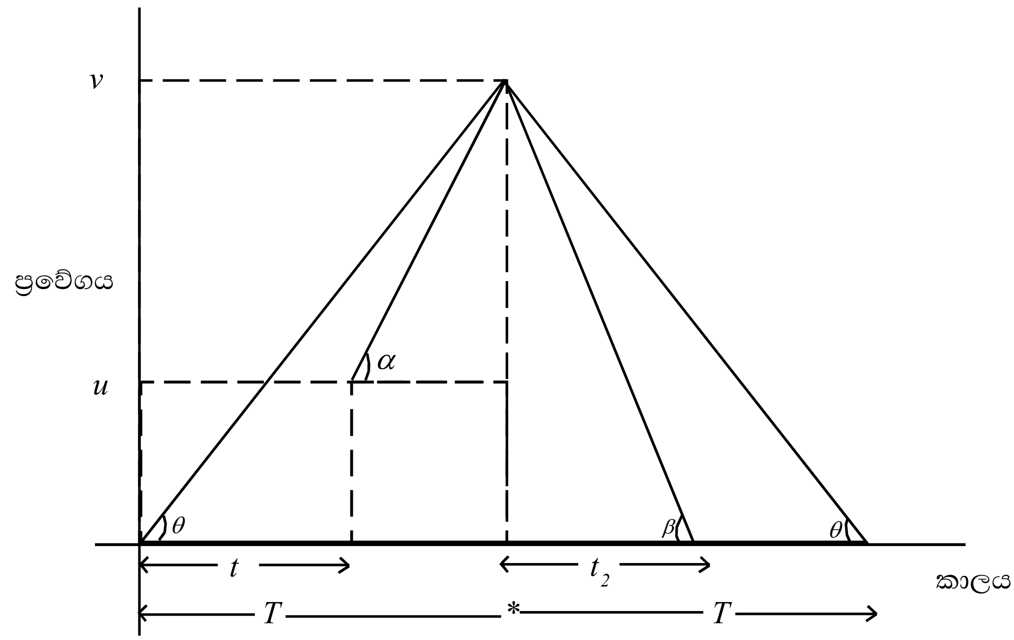
$Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1) = 40 + 1.5(40-23)$

$= 40 + 25.5 = 65.5$

එනම් පිටත පිහිටීම් නැත.

කොටස B

01. (*a*)



(i) $\tan\theta = a$, , $\tan\beta = 2a$, $\tan\alpha = \dfrac{3a}{2}$

$\tan\theta = \dfrac{v}{T}$, $v = aT$ ———— (1)

$\tan\alpha = \dfrac{3a}{2} = \dfrac{v-u}{T-t}$

$2(v-u) = 3a(T-t)$ ———— (2)

(1) හා (2) න්

$$2\left[aT - u\right] = 3a(T-t)$$

$$3at - 2u = aT$$

(1) $\Rightarrow$ $V = 3at - 2u$

T_P = P ගත් කාලය $2T = 2\left(3t - \dfrac{3u}{a}\right)$

T_Q = Q ගත් කාලය $\left(T-t\right) + t_2$

$$= 2t - \frac{2u}{a} + \frac{v}{2a}$$

$$= 2t - \frac{2u}{a} + \frac{3t}{2} - \frac{u}{a}$$

$$= \frac{7t}{2} - \frac{3u}{a}$$

(ii) කාල වෙනස $= T_P - T_Q$

$$= 2\left(3t - \frac{2u}{a}\right) - \left(\frac{7t}{2} - \frac{3u}{a}\right)$$

$$= \frac{5t}{2} - \frac{u}{a}$$

(iii) P ගමන් කළ දුර $= \frac{1}{2}.V.2T = VT$

$$= \left(3at - 2u\right).\frac{\left(3at - 2u\right)}{a}$$

$$= \frac{\left(3at - 2u\right)^2}{a}$$

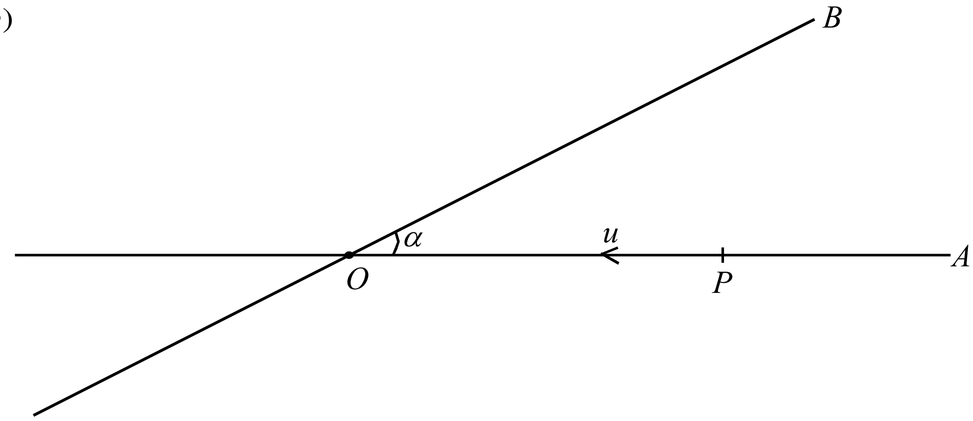
Q ගමන් කළ දුර $= \frac{1}{2}\left(u + V\right)\left(T - t\right) + \frac{1}{2}V.t_2$

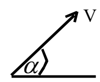
$$= \frac{1}{2}\left[u + \left(3at - 2u\right)\right]\left[2t - \frac{2u}{a}\right] + \frac{1}{2}\left[\left(3at - 2u\right)\left(\frac{3t}{2} - \frac{u}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(3at - u\right)\frac{\left(2at - 2u\right)}{a} + \left(3at - 2u\right)\frac{\left(3at - 2u\right)}{2a}\right]$$

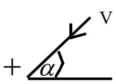
$$= \frac{1}{2a}\left[\left(3at - u\right)\left(2at - 2u\right) + \frac{\left(3at - 2u\right)^2}{2}\right]$$

(*b*)



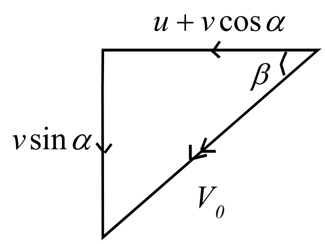
$V_{P,E} = \overleftarrow{u} \quad \leftarrow$ $\qquad V_{Q,E} =$ 

$V_{P,Q} = V_{P,E} + V_{E,Q}$

$= \underset{\leftarrow}{u} +$ 

$\leftarrow$

$= \overleftarrow{u + v\cos\alpha} + \downarrow v\sin\alpha$



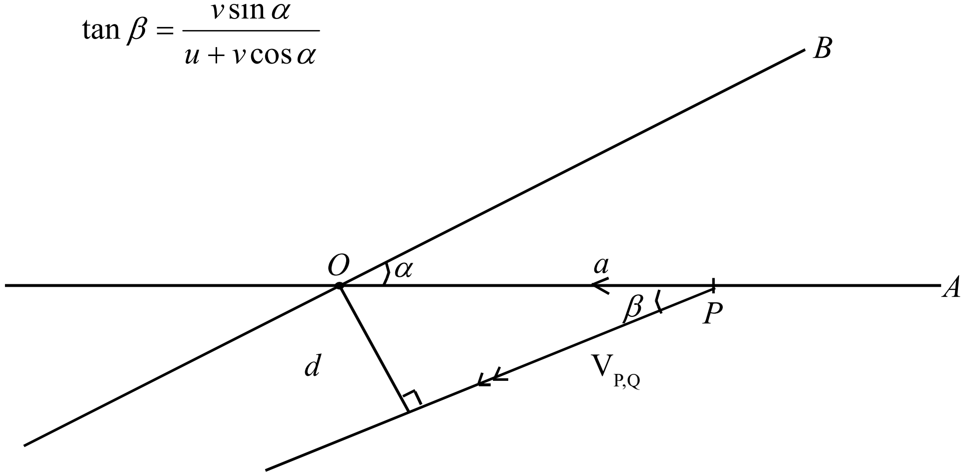
$V_0^{\,2} = (u + v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2$

$V_0^{\,2} = u^2 + v^2\cos^2\alpha + v^2\sin^2\alpha + 2uv\cos\alpha$

$V_0^{\,2} = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

$V_0 = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$\tan\beta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$



කෙටිතම දුර $\quad d = a\sin\beta$

$$= \frac{av\sin\alpha}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}}$$

$t =$ ගත් කාලය $= \dfrac{PM}{V_0} = \dfrac{a\cos\beta}{V_0}$

$$t = \frac{a(u + v\cos\alpha)}{V_0^2}$$

$$t = \frac{a(u + v\cos\alpha)}{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$$

P ගමන් කළ දුර $= ut$

Q ගමන් කළ දුර $= vt$

O සිට දුරවල් අතර අනුපාතය $= \dfrac{a - ut}{Vt}$

$$\frac{a - \dfrac{a(u + v\cos\alpha)u}{V_0^2}}{\dfrac{va(u + v\cos\alpha)}{V_0^2}} = \frac{v + u\cos\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

02. උපරිම වේගයේ දී ත්වරණය ශුන්‍ය වේ.

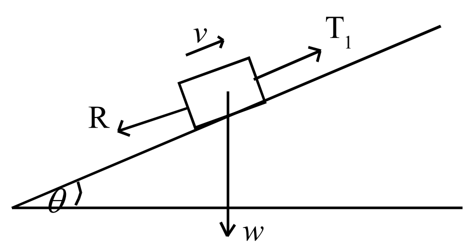
$\sin\theta = \dfrac{1}{n}$

$\nearrow$ $F = ma$ යොදමු

$T_1 - w\sin\theta - R = \dfrac{w}{g} \times 0$

$T_1 = R + w\sin\theta$

$H = (w\sin\theta + R)v$ ———— (1)

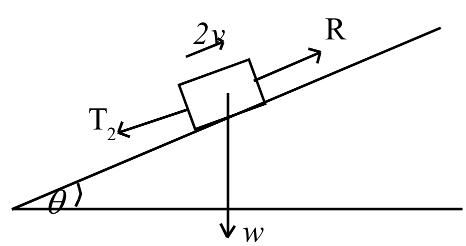


$\swarrow$ $F = ma$ යොදමු

$T_2 + w\sin\theta - R = \dfrac{w}{g} \times 0$

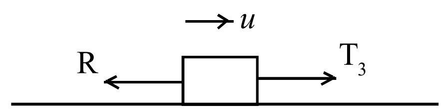
$T_2 = R - w\sin\theta$

$H = (R - w\sin\theta)2v$ ———— (2)



(1) හා (2)න් $R = \dfrac{3w}{n}$

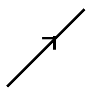
$F = ma$ යොදමු



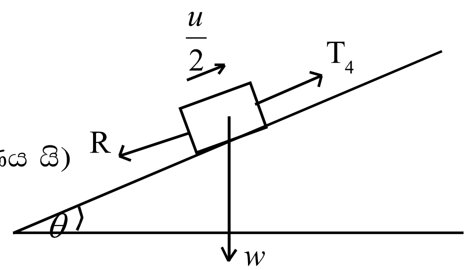
$$T_3 - R = \frac{w}{g} \times 0$$

$$T_3 = R = \frac{3w}{n}$$

$$H = T_3 . u = \frac{3uw}{n}$$



$F = ma$ යොදමු



$$T_4 - R - w\sin\theta = \frac{w}{g} \times a$$ (a යනු ත්වරණය යි)

$$T_4 = \frac{4w}{n} + \frac{wa}{g}$$

$$H = T_4 . \frac{u}{2}$$

$$\frac{u}{2}\left(\frac{4w}{n} + \frac{wa}{g}\right) = \frac{3wu}{n}$$

$$a = \frac{2g}{n}$$

(b) $V_{A,E} = (-3\underline{i} + 29\underline{j})$

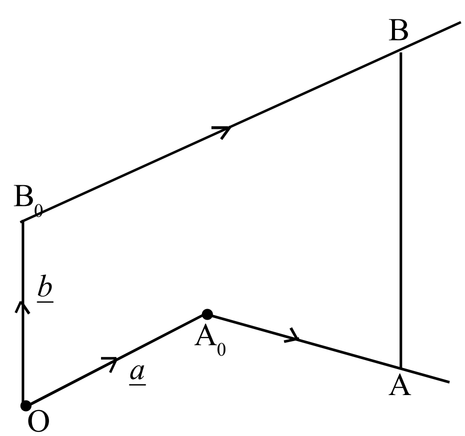
$V_{B,E} = (\underline{i} + 7\underline{j})$

$V_{B,A} = V_{B,E} + V_{E,A}$

$= V(\underline{i} + 7\underline{j}) - (-3\underline{i} + 29\underline{j})$

$V_{B,A} = (v+3)\underline{i} + (7v-29)\underline{j}$ ———————— (1)

කාලය t වන මොහොතේ දී



$\underline{r}_A = \underline{a} + \left(-3\underline{i} + 29\underline{j}\right)t$

$\underline{r}_B = \underline{b} + v\left(\underline{i} + 7\underline{j}\right)t$

$\overrightarrow{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$

$= \left[\underline{b} + v\left(\underline{i} + 7\underline{j}\right)t\right] - \left[\underline{a} + \left(-3\underline{i} + 29\underline{j}\right)t\right]$

$\overrightarrow{AB} = \left(\underline{b} - \underline{a}\right) + \left(v+3\right)t\,\underline{i} + \left(7v-29\right)t\underline{j}$

$t = 0$ විට, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_0B_0} = \underline{b} - \underline{a} = \left[-56\,\underline{i} + 8\,\underline{j}\right]$

$$\overrightarrow{AB} = \left[-56\,\underline{i} + 8\,\underline{j}\right] + \left(v+3\right)t\,\underline{i} + \left(7v-29\right)t\underline{j}$$

$$= \left[\left(v+3\right)t - 56\right]\underline{i} + \left[\left(7v-29\right)t + 8\right]\underline{j} \text{ ——— } (2)$$

$$\overrightarrow{AB} = 0$$

එනම්, $\left(v+3\right)t - 56 = 0$ ——— (3)

$\left(7v-29\right)t + 8 = 0$ ——— (4)

(3) හා (4)න්

$v = 4$

$\overrightarrow{AB} = \left[\left(v+3\right)t - 56\right]\underline{i} + \left[\left(7v-29\right)t + 8\right]\underline{j}$

$v = 3$ විට

$\overrightarrow{AB} = \left(6t - 56\right)\underline{i} + \left(8 - 8t\right)\underline{j}$ වේ.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(6t-56\right)^2 + \left(8-8t\right)^2}$

$= \sqrt{100\left(t^2 - 8t + 32\right)}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 10\sqrt{\left(t-4\right)^2 + 16}$

AB අවම වනුයේ. $t = 4$ and $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ අවම $= 40m$

$v = 3$ හා $t = 4$ විට

$\overrightarrow{AB} = 32\,\underline{i} - 24\,\underline{j}$

$\underline{V}_{A,B} = 6\,\underline{i} - 8\,\underline{j}$

$\underline{V}_{A,B}\,\overrightarrow{AB} = \left(6\,\underline{i} - 8\,\underline{j}\right)\left(32\,\underline{i} - 24\,\underline{j}\right)$

$= -192 + 192$

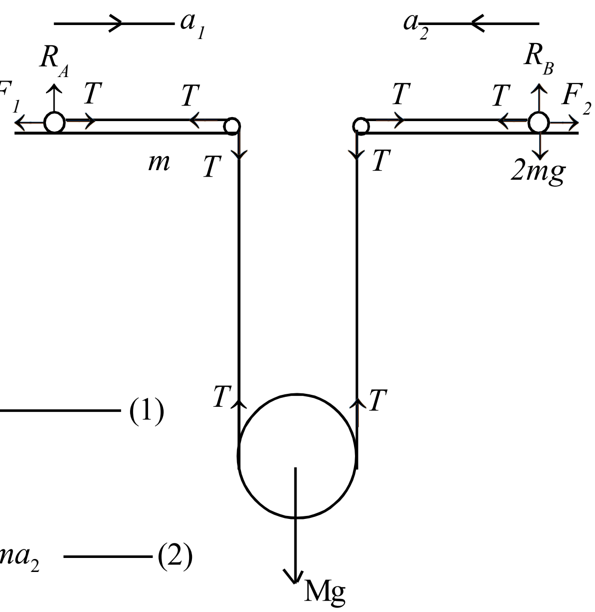
$= 0$

$\underline{V}_{A,B}\,\overrightarrow{AB} = 0$

එනම්, $V_{A,B}$, $\overrightarrow{AB}$ ලම්භක වේ.

03. (*a*) Let $A_{A,E} = \xrightarrow{\quad} a_1$

$A_{B,E} = \xleftarrow{\quad} a_2$ යැයි ගනිමු.



එවිට, $A_{M,E} = \downarrow \dfrac{a_1 + a_2}{2}$

අංශූන් චලනය වන විට

$F_1 = \mu.mg,\ F_2 = \mu'(2mg)$

$F = ma$ යෙදීමෙන්,

$A \ \rightarrow \qquad T - \mu mg = ma_1$ ——— (1)

$F = ma$ යෙදීමෙන්,

$B \ \leftarrow \qquad T - \mu'(2mg) = 2ma_2$ ——— (2)

$F = ma$ යෙදීමෙන්,

$M \ \downarrow \qquad Mg - 2T = M\dfrac{(a_1 + a_2)}{2}$ ——— (3)

(1) න්, $a_1 = \dfrac{T - \mu mg}{m}$

(2) න්, $a_2 = \dfrac{T - 2\mu' mg}{2m}$

(3)හි ආදේශයෙන්

$$Mg - 2T = \frac{M}{2}\left[\frac{T - \mu mg}{m} - \frac{T - 2\mu' mg}{2m}\right]$$

$$Mg - 2T = \frac{MT}{2m} - \frac{\mu Mg}{2} + \frac{MT}{4m} - \frac{\mu' Mg}{2}$$

$$T\left[2 + \frac{M}{4m} + \frac{M}{2m}\right] = Mg + \frac{\mu Mg}{2} + \frac{\mu' Mg}{2}$$

$$T = \frac{2Mmg(2 + \mu + \mu')}{(3M + 8m)}$$

(ii) $\mu > 2\mu'$ බව දී ඇත.

චලිතය සිදුවීම සඳහා $a_1 > 0$

$$a_1 = \frac{T}{m} - \mu g > 0$$

$$T > \mu mg$$

$$\frac{2Mmg(2+\mu+\mu')}{(3M+8m)} > \mu mg$$

$$\frac{2+\mu+\mu'}{\mu} > \frac{3M+8m}{2M}$$

$$\frac{\mu'+2}{\mu} > \frac{3M+8m}{2m} - 1$$

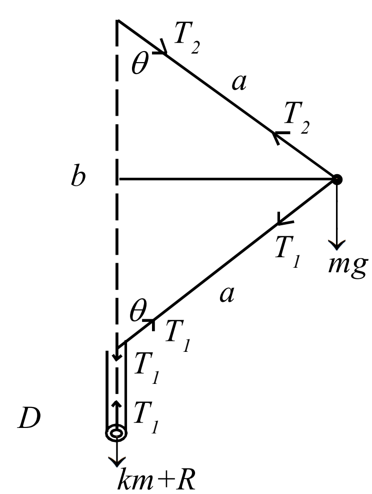
$$\frac{\mu'+2}{\mu} > \frac{M+8m}{2M}$$

$$\frac{\mu}{\mu'+2} < \frac{2M}{8m+M}$$

(b) $F = ma$ යෙදීමෙන්,

$\uparrow B$ $\quad T_2\cos\theta - T_1\cos\theta - mg = 0$

$(T_2 - T_1)\cos\theta = mg$ ———— (1)



$F = ma$ යෙදීමෙන්,

$\overleftarrow{B}$ $\quad (T_1 + T_2)\sin\theta = maw^2\sin\theta$

$(T_1 + T_2) = maw^2$ ———— (2)

Dහි සමතුලිතතාව සඳහා,

$\uparrow$ $\quad T_1 - kmg - R = 0$

$R = T_1 - kmg$ ———— (3)

$$cos\theta = \frac{b}{2a}$$

(1)න් $T_2 - T_1 = \dfrac{2mga}{b}$

(2) න් $T_2 + T_1 = maw^2$

$$T_1 = \frac{ma}{2}\left[w^2 - \frac{2g}{b}\right] , \quad T_2 = \frac{ma}{2}\left[w^2 + \frac{2g}{b}\right]$$

(3)න් $R = \frac{ma}{2}\left[w^2 - \frac{2g}{b}\right] - kmg$

$R \geq 0$

$\frac{ma}{2}\left[w^2 - \frac{2g}{b}\right] \geq kmg$

$w^2 ab \geq 2g\left(a + kb\right)$ ———— (4)

උපරිම ආතතිය λmg වේ.

එනම් $T_1, T_2 \leq \lambda mg$

$T_2 \leq \lambda mg$

$\frac{ma}{2}\left[w^2 + \frac{2g}{b}\right] \leq \lambda mg$

$w^2 \leq \frac{2\lambda g}{a} - \frac{2g}{b}$

(4)න් $w^2 \geq \frac{2g}{b} + \frac{2kg}{a}$

$\frac{2g}{b} + \frac{2kg}{a} \leq w^2 \leq \frac{2\lambda g}{a} - \frac{2g}{b}$

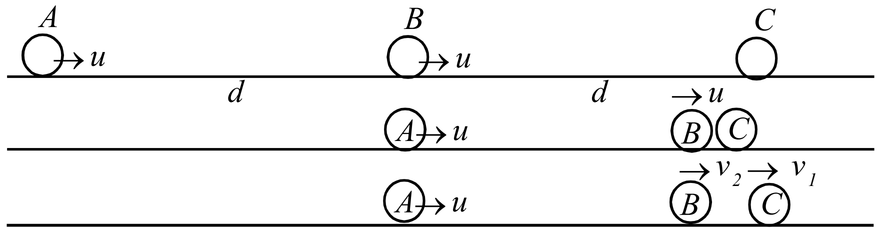
$\frac{2g}{b} + \frac{2kg}{a} \leq \frac{2\lambda g}{a} - \frac{2g}{b}$

$\frac{1}{b} + \frac{k}{a} \leq \frac{\lambda}{a} - \frac{1}{b}$

$\frac{2}{b} \leq \frac{\lambda - k}{a}$

$\left(\lambda - k\right)b \geq 2a$

04. (a)



ගැටුමට පෙර

ගැටුමට පසු

B හි හා C හි පළමු ගැටුමට

$\rightarrow$ පද්ධතිය සඳහා $I = \Delta mv$ යෙදවීමෙන්

$\rightarrow m(v_2 - u) + m(v_1 - 0) = 0 \quad \therefore mv_1 + mv_2 = mu$

$v_1 + v_2 = u$ ———— (1)

නිව්ටන් ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්

$v_1 - v_2 = eu$ ———— (2)

(1) හා (2) න් $v_1 = \frac{u}{2}(1+e), \quad v_2 = \frac{u}{2}(1-e)$

B සමඟ ගැටීමට A ගන්නා කාලය t_0 නම්

$$t_0 = \frac{d}{u} + \frac{d}{u - v_2}$$

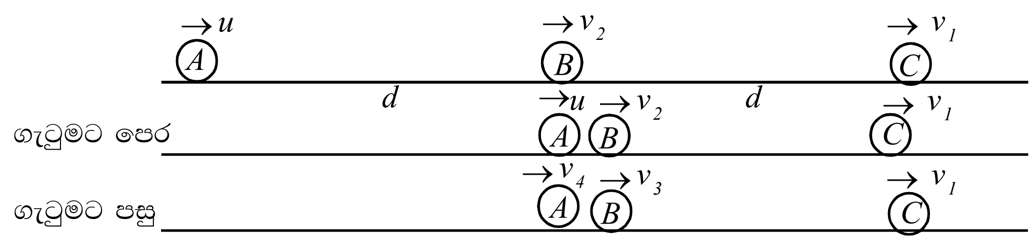
$$= \frac{d}{u} + \frac{d}{u - \frac{u}{2}(1-e)}$$

$$= \frac{d}{u} + \frac{2d}{u(1+e)}$$

$$\frac{d(3+e)}{u(1+e)}$$

A ගමන් කළ දුර $= ut_0$

$$= \frac{d(3+e)}{(1+e)}$$



A හා B අතර දෙවන ගැටුමට

$\rightarrow$ ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$mv_3 + mv_4 = mv_2 + mu$$

$$v_3 + v_4 = u + v_2 \qquad (3)$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්,

$$v_3 - v_4 = e(u - v_2) \qquad (4)$$

(3) හා (4)න් $v_3 = \frac{u}{2}(1+e) + \frac{v_2}{2}(1-e)$

$$= \frac{u}{2}(1+e) + \frac{u}{4}(1-e)^2$$

$$= \frac{u}{4}\left[2 + 2e + 1 - 2e + e^2\right]$$

$$v_3 = \frac{u}{4}\left[3 + e^2\right]$$

දැන් $v_3 - v_1 = \frac{u}{4}\left[3 + e^2\right] - \frac{u}{2}[1+e]$

$$= \frac{u}{4}\left[1 - 2e + e^2\right]$$

$$= \frac{u}{4}[1-e]^2$$

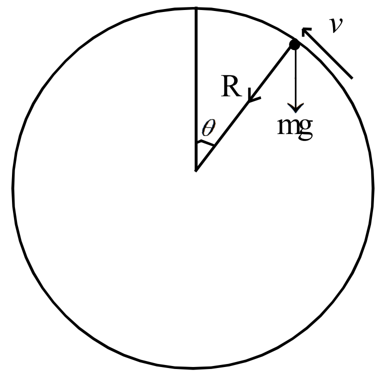
$$v_3 > v_1$$

එනම් A හා B අතර තවත් ගැටුමක් විය හැකි ය.

(b) ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$\frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mga(1 + cos\theta)$$

$$v^2 = u^2 - 2ag(1 + cos\theta) \qquad (1)$$



$\nearrow F = ma$

$R + mgcos\theta = \dfrac{mv^2}{a}$ ——————— (2)

$R = \dfrac{m}{a}\left[u^2 - 2ag - 3agcos\theta\right]$

When $R = 0$, $\theta = \alpha$ (say)

$O = u^2 - 2ag - 3agcos\alpha$

$cos\alpha = \dfrac{u^2 - 2ag}{3ag}$

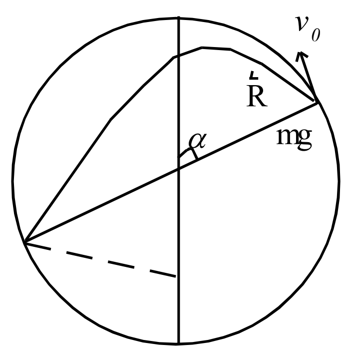
$2ag < u^2 < 5ag$ නම්

$O < cos\alpha < 1$

එනම් α සුළු කෝණයකි.

එනම් ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයට යාමට පෙර අංශුව ගෝලය හැර යයි.

$cos\alpha = \dfrac{u^2 - 2ag}{3ag}$ විට අංශුව ගෝලය හැර යයි.



$\theta = \alpha$, $v = v_0$ විට

(1) න් $v_0{}^2 = u^2 - 2ag\left(1 + cos\alpha\right)$

$= u^2 - 2ag - 2agcos\alpha$

$= 3agcos\alpha - 2agcos\alpha$

$v_0{}^2 = agcos\alpha$ ——————— (3)

$S = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$\leftarrow$ $2a\sin\alpha = v_0 c\text{os}\,\alpha . t_0$ ——————— (4)

$\uparrow$ $-2a\cos\alpha = v_0 c\text{os}\,\alpha . t_0 - \dfrac{1}{2}gt_0{}^2$ ——————— (5)

(4) හා (5)න්

$-2a\cos\alpha = \dfrac{2a\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{2a^2 g}{v_0{}^2} . \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\dfrac{a^2 g}{v_0{}^2} . \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$

$$v_0^{\,2} = \frac{ag\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \text{ ——— } (6)$$

(3) හා (6) න්

$$\tan^2\alpha = 1$$

$$\alpha = 45^0$$

$$u^2 - 2ag = 3ag\cos 45^0$$

$$u^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 2\right)ag$$

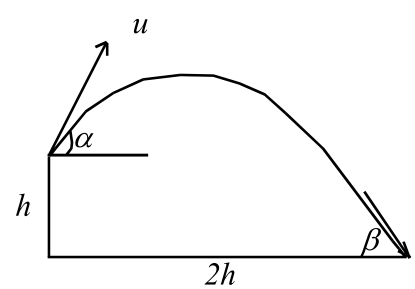
05. (a) පියාසර කාලය t නම්

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ ——— } (1)$$

$$\longrightarrow 2h = u\cos\alpha.t \text{ ——— } (2)$$

$$\uparrow \quad -h = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$$

(1) න්
(2) ට ආදේශයෙන්



$$-h = u\sin\alpha.\frac{2h}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}.g\frac{4h^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$-1 = 2\tan\alpha - \frac{2gh}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$1 + 2\tan\alpha = \frac{2gh}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$u^2\cos^2\alpha = \frac{2gh}{1+2\tan\alpha}$$

$$u^2 = \frac{2gh\left(1+\tan^2\alpha\right)}{\left(1+2\tan\alpha\right)}$$

$$v = u + at$$

$$\uparrow \quad v_1 = u\sin\alpha - gt$$

$$= u\sin\alpha - g\times\frac{2h}{u\cos\alpha}$$

$$v_1 = u\sin\alpha - \frac{2gh}{u\cos\alpha}$$

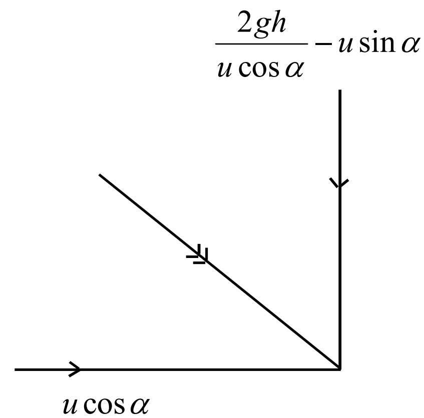
$\downarrow$ ප්‍රවේගය $= \dfrac{2gh}{u\cos\alpha} - u\sin\alpha$

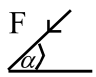
$$\tan\beta = \frac{\dfrac{2gh}{u\cos\alpha} - u\sin\alpha}{u\cos\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{2gh}{u^2\cos^2\alpha} - \tan\alpha$$

$$= 1 + 2\tan\alpha - \tan\alpha$$

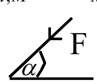
$$\tan\beta = 1 + \tan\alpha$$

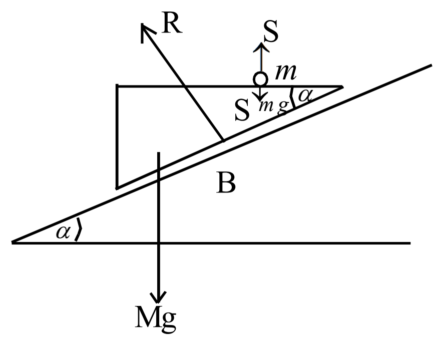


(b) $A_{m,E} =$ 

$A_{m,M} = \longrightarrow f$

$A_{m,E} = A_{m,M} + A_{M,E}$

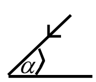
$\longrightarrow f +$ 



$F = ma$ යෙදීමෙන්

(M, m) System

$\leftarrow,\ R\sin\alpha = MF\cos\alpha + m(F\cos\alpha - f)$ ———— (1)

 $(M + m)g\sin\alpha = MF + m(F - f\cos\alpha)$ ———— (2)

$m \leftarrow F = ma$ යෙදීමෙන්

$0 = m(F\cos\alpha - f)$ ———— (3)

(3)න් $f = F\cos\alpha$

(2) ට ආදේශයෙන්,

$$\left(M + m\right)g\sin\alpha = MF + m(F - F\cos^2\alpha)$$

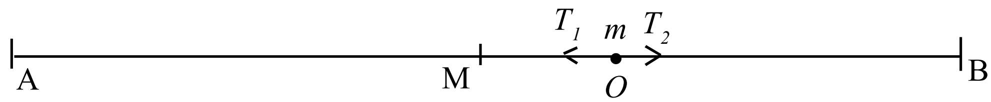
$$\left[M + m\sin^2\alpha\right]F = \left(M + m\right)g\sin\alpha$$

$$F = \frac{\left(M + m\right)g\sin\alpha\cos\alpha}{\left(M + m\sin^2\alpha\right)}$$

$$f = \frac{M(M+m)g\cos\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)}$$

(1)න්, $R = \dfrac{M(M+m)g\cos\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)}$

06.



$AM = MB = 4l$, Let $MO = d$.

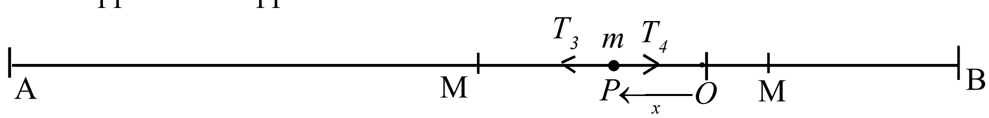
O හිදී $T_1 = T_2$

$$\frac{\lambda(d+2l)}{2l} = \frac{4\lambda(l-d)}{3l}$$

$$3(d+2l) = 8(l-d)$$

$$11d = 2l$$

$$d = \frac{2l}{11}, \quad OM = \frac{2l}{11}$$



$OP = x$ යැයි ගනිමු.

$\underline{F} = ma$

$\leftarrow T_3 - T_4 = m\ddot{x}$

$$\frac{\lambda}{2l}\left[\left(4l + \frac{2l}{11} - x\right) - 2l\right] - \frac{4\lambda}{3l}\left[\left(4l - \frac{2l}{11} + x\right) - 3l\right] = m\ddot{x}$$

$$\frac{\lambda}{2l}\left[\frac{24l}{11} - x\right] - \frac{4\lambda}{3l}\left[\frac{9l}{11} + x\right] = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{11\lambda}{6ml}x$$

එනම් චලිතය සරල අනුවර්තී වේ.

(i) දෝලන කේන්ද්‍රය $x = O$, (i.e) O

$$V^2 = \frac{11\lambda}{6ml}\left[A^2 - x^2\right] \quad (A = \text{විස්තාරය})$$

$x = \dfrac{2l}{11}$, $v = 0$ විට $V^2 = \dfrac{11\lambda}{6ml}\left[A^2 - x^2\right]$

එම නිසා - $A = \dfrac{2l}{11}$

එනම් අංශුව M' ට පැමිණෙන විට ක්ෂණික ව නිසල වේ.

මෙහි $OM' = \frac{2l}{11}$, .

$$BM' = 4l - \frac{4l}{11} = \frac{40l}{11} > 3l$$

තන්තුව තව දුරටත් තද වේ

දෝලන කාලාවර්තය $\frac{2\pi}{\omega}\left(\omega^2 = \frac{11\lambda}{6ml}\right)$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{6ml}{11\lambda}}$$

$$V^2 = \frac{11\lambda}{6ml}\left[\left(\frac{2l}{11}\right)^2 - x^2\right]$$

$$MC = \frac{3l}{11}, \quad OC = \frac{3l}{11} - \frac{2l}{11} = \frac{l}{11}$$

$x = \frac{l}{11}$, විට $v = v_0$ යැයි ගනිමු.

$$V_0^2 = \frac{11\lambda}{6ml}\left[\left(\frac{2l}{11}\right)^2 - \left(-\frac{l}{11}\right)^2\right]$$

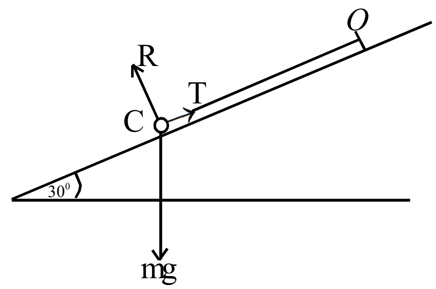
$$V_0^2 = \frac{11\lambda}{6ml} \times \frac{3l^2}{11\times 11}$$

$$V_0^2 = \frac{\lambda l}{22m}$$

$$V_0^2 = \sqrt{\frac{\lambda l}{22m}}$$

07. $OC = d$ යැයි ගනිමු.

mහි සමතුලිතතාව සඳහා



$$T - mg\sin 30^0 = 0$$

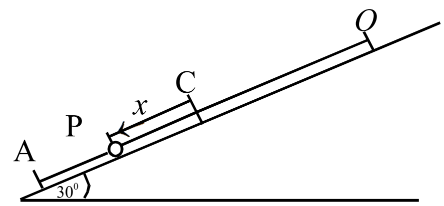
$$2T = mg$$

$$2 \times \frac{3mg(d-6a)}{6a} = mg$$

$$d = 7a$$

Let $CA = 2a$ and $CP = x$

Aහි දී ශක්තිය



$$= 0 - mg.2a.\sin 30^0 + \frac{1}{2}.mg \times \frac{(3a)^2}{6a}$$

Pහි දී ශක්තිය

$$-\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx\sin 30^0 + \frac{1}{2} \times 3mg \times \frac{(a+x)^2}{6a}$$

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්

$$= 2mga.\sin 30^0 + \frac{mg}{4a} \times 9a^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mgx}{2} + \frac{mg}{4a}(a+x)^2$$

t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්,

$$O = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} - \frac{mg\dot{x}}{2} + \frac{mg}{4}.2(a+x)\dot{x}$$

$$O = \ddot{x} - \frac{g}{2} + \frac{g}{2a}(a+x)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{2a}x = 0$$

$$x = A\cos\omega t + B\cos\omega t \qquad \left(\omega^2 = \frac{g}{2a}\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\sin\omega t$$

$t = 0$, $x = 2a$ and $\dot{x} = 0$

$2a = A$ ——————— (1)

$0 = 0 + B\omega$ ——————— (2)

$B = 0$

$x = 2a\cos\omega t$

$x=-a$ විට තන්තුව හැකිළේ.

$t=t_1$ විට $x=-a$ යැයි ගනිමු.

$-a = 2a\cos\omega t_1$

$\cos\omega t_1 = -\dfrac{1}{2}$

$\omega t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$

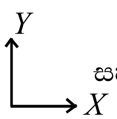
$t_1 = \dfrac{1}{\omega}.\dfrac{2\pi}{3}$

$t_1 = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{g}}$

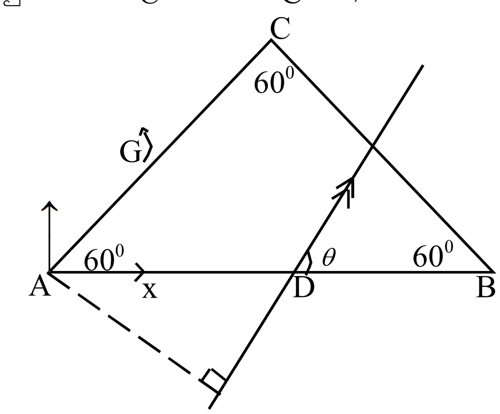
$\omega t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ විට , $\dot{x} = 2a\omega\sin\omega t$

$$\dot{x} = 2a\sqrt{\frac{2a}{g}}\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{3ag}{2}}, \qquad \text{වේගය } \sqrt{\frac{3ag}{2}}$$

08. (a) පද්ධතිය 

සහ A ලක්ෂ්‍යය වටා G↶ යුග්මයකට ඌනනය කල විට,



A↶ , $M = G$

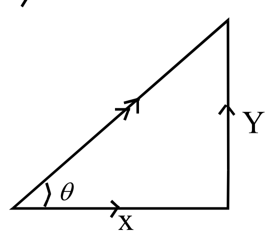
B↶ , $\dfrac{M}{2} = -Y.2a + G$

C↶ , $2M = X.\sqrt{3}a - Y.a + G$

$G = M$, $Y = \dfrac{M}{4a}$, $X = \dfrac{5M}{4\sqrt{3}a}$

$R = \sqrt{X^2+Y^2} = \dfrac{M}{a}\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{25}{48}}$

$R = \dfrac{M}{a}\sqrt{\dfrac{7}{12}}$



$\tan\theta = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$R.AD\sin\theta = M$

$(R\sin\theta)AD = M$

$Y.AD = M$

$AD = \dfrac{M}{Y} = 4a$

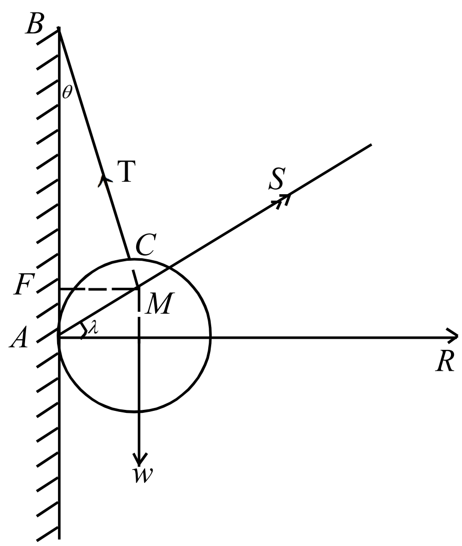
ගෝලය මත ක්‍රියා කරන බල

Oහි දී W

Cහි දී T

F හා Rහි සම්ප්‍රයුක්තය S වේ.

T, W, S බල Cහි දී ක්‍රියා කරයි.



$AB = h$, $OA = a$, $O\hat{A}M = \lambda$

මෙහි $\mu = \tan\lambda$

$OM = a\tan\lambda = a\mu$

$\tan\theta = \dfrac{a}{h - OM} = \dfrac{a}{h - a\mu}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{a}{h - a\mu}\right)$

When $\mu = \dfrac{h}{2a}, \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{a}{2a\mu - a\mu}\right)$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu}\right)$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\mu}$

AMB ත්‍රිකෝණය සලකමු.

$\left.\begin{array}{l} T \to MB \\ W \to BA \\ S \to AM \end{array}\right\}$ AMB යනු බල ත්‍රිකෝණය යි.

$\dfrac{T}{\sin(90-\lambda)} = \dfrac{W}{\sin[90-(\theta-\lambda)]} = \dfrac{S}{\sin\theta}$

$\dfrac{T}{\cos\lambda} = \dfrac{W}{\cos(\theta-\lambda)}$

$$T = \frac{W\cos\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$$

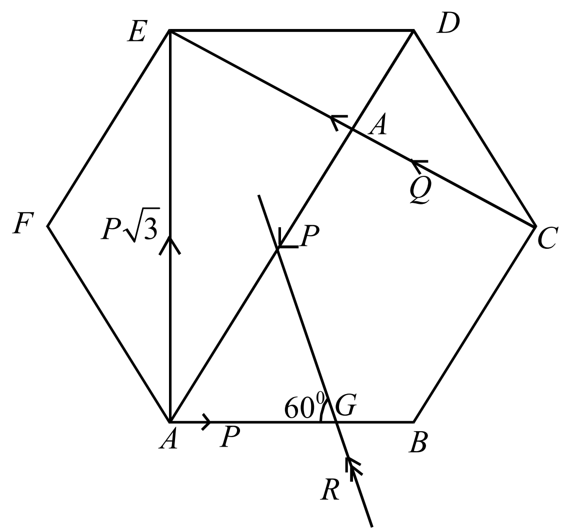
$$T = \frac{W\cos\lambda}{\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda}$$

$$T = \frac{W}{\cos\theta + \sin\theta\tan\lambda}$$

$$T = \frac{W}{\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} + \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}}$$

$$T = \frac{W\sqrt{1+\mu^2}}{2\mu}$$

09. (a) $\longleftarrow$



$$X = P - P\cos 60^0 - Q\cos 30^0$$

$$X = \frac{P - Q\sqrt{3}}{2}$$

$$\uparrow Y = P\sqrt{3} - P\sin 60^0 + Q\sin 30^0$$

$$Y = \frac{Q + P\sqrt{3}}{2}$$

(i) පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය නම්,

$X = 0,$ සහ $Y = 0$

එවිට $P = Q\sqrt{3}$ සහ $Q = 0$

එහෙත් $Q \neq 0$

පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය නොවේ.

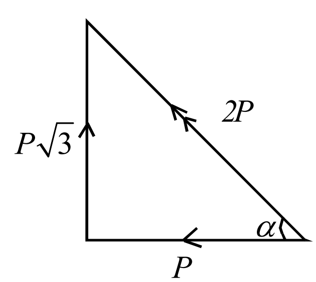
(ii) $Q = P\sqrt{3}$ නම්

$X = -P, \quad Y = P\sqrt{3}$

$\therefore \; R^2 = P^2 + \left(\sqrt{3}P\right)^2$

$R = 2P$

$\tan\alpha = \sqrt{3}\,, \quad \alpha = 60^0$



(iii) A වටා සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණය A = වට බලවල ඝූර්ණවල විජීය ඓක්‍යය..

$$R.AG\sin 60^0 = Q.\frac{3a}{2}$$

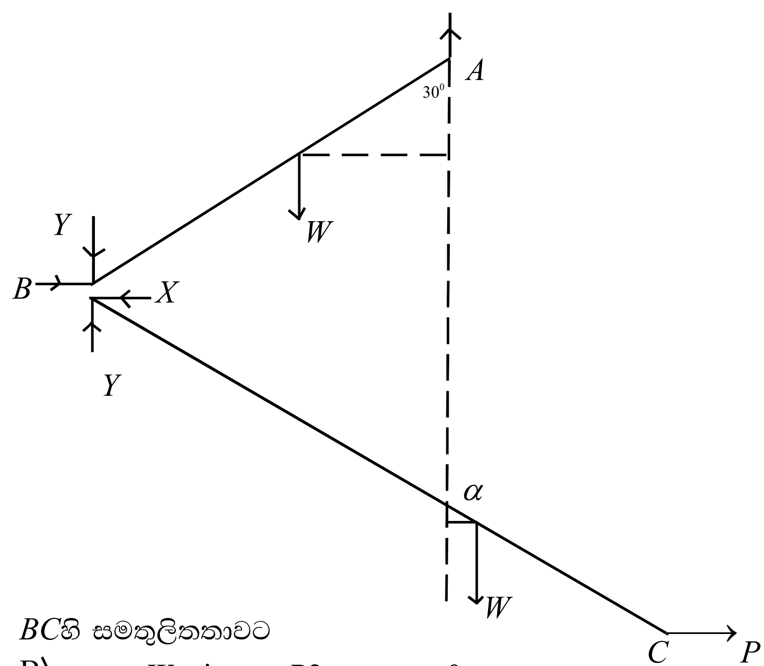
$$\left(R\sin 60^0\right)AG = P\sqrt{3}.\frac{3a}{2}$$

$$Y.AG = \frac{3\sqrt{3}Pa}{2}$$

$$AG = \frac{3\sqrt{3}Pa}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}P}$$

$$AG = \frac{3a}{2}$$

(b)



BCහි සමතුලිතතාවට

B↻ $-Wa\sin\alpha + P2a\cos\alpha = 0$

$$P = \frac{W}{2}\tan\alpha$$

$\longrightarrow$ $P - X = 0 \qquad X = P$

$\uparrow$ $Y - W = 0 \qquad Y = W$

AB හි සමතුලිතතාවට

$A \circlearrowleft$ $\quad Wa\sin 30^0 + Y.2a\sin 30^0 - X.2a\cos 30^0 = 0$

$$\frac{W}{2} + W - P\sqrt{3} = 0$$

$$P = \frac{\sqrt{3}W}{2}$$

B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

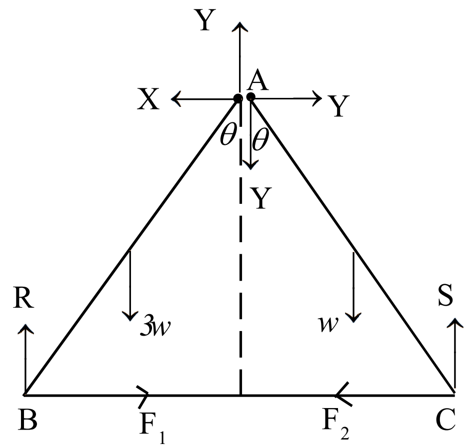
$$R = \sqrt{\frac{3W^2}{4} + W^2} \qquad \tan\alpha = \frac{2P}{W} = \sqrt{3}$$

$$R = \sqrt{\frac{7W}{2}} \qquad \alpha = 60^0$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

10. (*a*) AB හා ACහි සමතුලිතතාවට



$\uparrow$ $\quad R + S - 4w = 0$

$$R + S = 4w$$

$B \circlearrowleft = 0$

$$S.4a\sin\theta - w.3a\sin\theta - 3w.a\sin\theta = 0$$

$$S = \frac{3w}{2}, \quad R = \frac{5w}{2}$$

$\longrightarrow$ $\quad F_1 - F_2 = 0; \quad F_2 = F_2$ (=*F*, say)

ABහි සමතුලිතතාවට $\quad A \circlearrowleft = 0$

$$F.2a\cos\theta - R.2a\sin\theta + 3w.a\sin\theta = 0$$

$$F = w\tan\theta$$

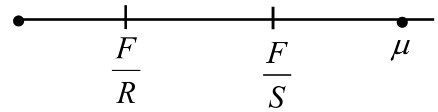
$$\frac{5w}{2} > \frac{3w}{2}$$

$$R > S$$

$$\frac{1}{R} < \frac{1}{S}$$

$$\frac{F}{R} < \frac{F}{S}$$

සමතුලිතතාවට , $\frac{F}{R} \le \mu$ හා $\frac{F}{S} \le \mu$



i.e $\frac{F}{R} < \frac{F}{S} \le \mu$

θ වැඩි වන විට $\frac{F}{S}$ මුලින් μ ට ළඟා වේ.

මුලින් ම C සීමාකාරී වේ.

දැන් $$\frac{F}{R} = \frac{w\tan\theta \times 2}{5w} = \frac{2\tan\theta}{5}$$

$$\frac{F}{S} = \frac{w\tan\theta \times 2}{3w} = \frac{2\tan\theta}{3}$$

එනම්, $\frac{F}{S} \le \mu$

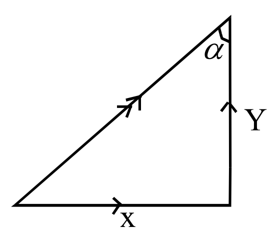
$$2\frac{\tan\theta}{3} \le \mu$$

$$\tan\theta \le \frac{3\mu}{2}$$

AB සඳහා

$\longrightarrow$
$$F - X = 0$$
$$X = F = w\tan\theta$$

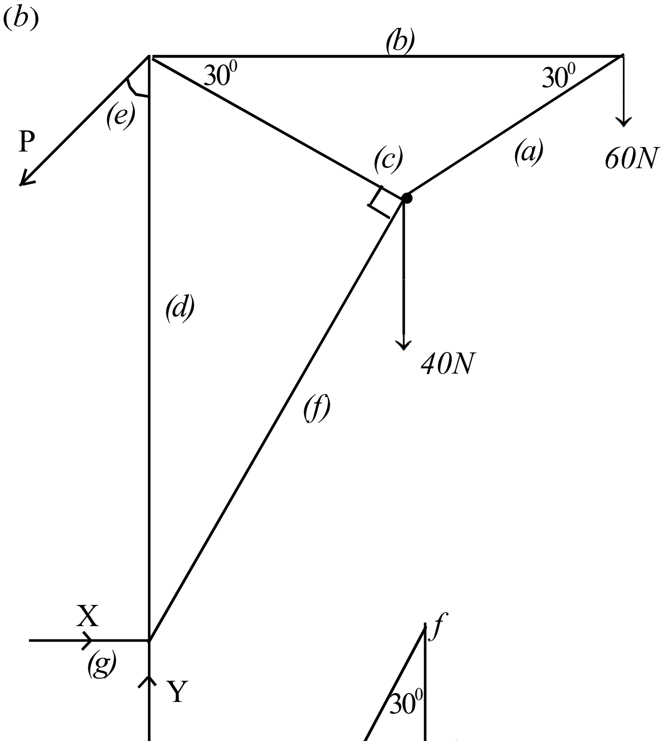
$\uparrow$
$$Y + R - 3w = 0$$
$$Y = \frac{w}{2}$$



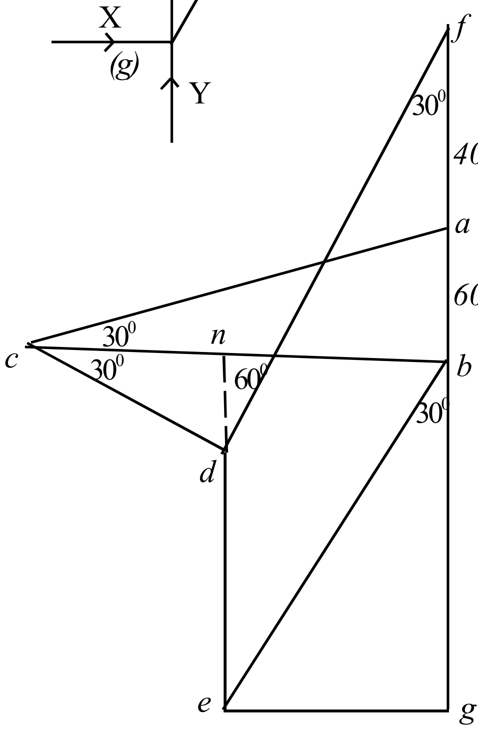
$$\tan\alpha = \frac{X}{Y} = 3\mu$$

$$\alpha = \tan^{-1}(3\mu)$$

(*b*)



දණ්ඩ	තෙරපුම	ආතති
AB	100	-
BC	-	$60\sqrt{3}$
CD	120	-
DB	40	-
AD	$80\sqrt{3}$	-



$$X = 40\sqrt{3}$$
$$Y = 220$$

Aහි දී ප්‍රතික්‍රියාව

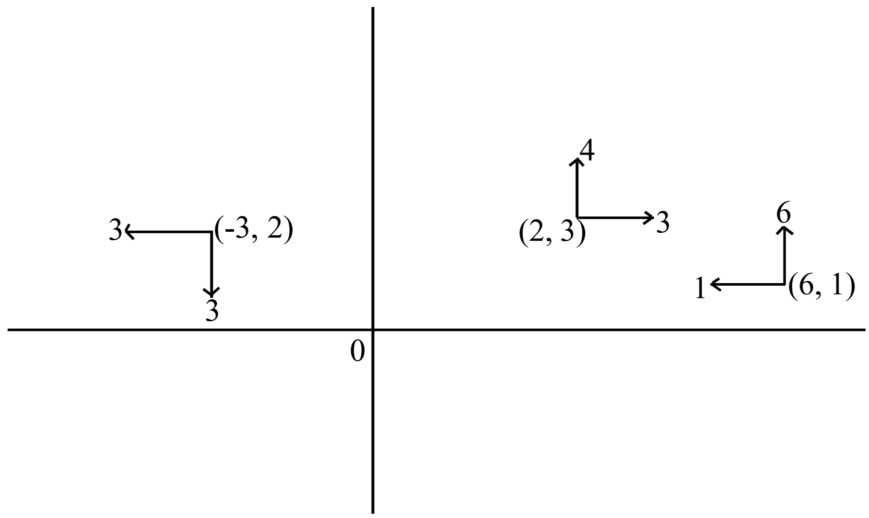
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$
$$= \sqrt{\left(40\sqrt{3}\right)^2 + 220^2}$$
$$= 20\sqrt{133}N$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X}$$

$$\tan\alpha = \frac{220}{40\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha = \frac{11}{2\sqrt{3}}$$

11. (*a*)



සම්ප්‍රයුක්තය $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

$= (3i + 4j) + (i + 6j) + (3i - 3j)$

$\underline{R} = -\underline{i} + 7\underline{j}$

$X = -1, \ Y = 7$ $\qquad |\underline{R}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}N$

$O\circlearrowleft = M = (9+6) + (36+1) + (8-9) = 15 + 37 - 1 = 51$

O වටා සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණය $=$ O වටා බලවල ඝූර්ණවල වීජීය ඓක්‍යය

$Y.x - X.y = M$

$7x + y = 51$

ක්‍රියා රේඛාව $\quad 7x + y - 51 = 0$

සමතුලිතතාව O $\quad \underline{F}_4 = \underline{i} - 7\underline{j}$ and $G = -51$

(*b*) $A\circlearrowleft \ = \lambda BC.h_1 = \lambda \times \frac{1}{2} \times 2BC \times h_1$

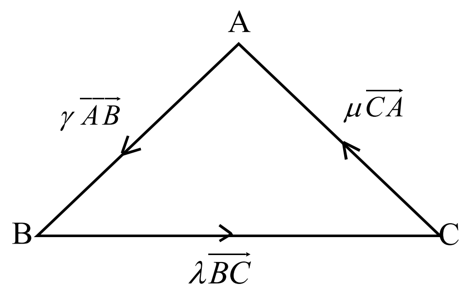
$= 2\lambda.\Delta ABC$

$B\circlearrowleft \ = \mu CA..h_2 = \mu \times 2 \times \frac{1}{2} \times CA \times h_2$

$= 2\mu.\Delta ABC$

$C\circlearrowleft \ = \gamma AB..h_3 = \gamma \times 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times h_3$

$= 2\gamma.\Delta ABC$



[h_1, h_2, h_3 යනු A, B හා C සිට පිළිවෙලින් BC, CA, AB රේඛාවලට ඇති ලම්බක දුරවල් වේ. $\quad \Delta ABC =$ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ඝූර්ණය ABC]

(i) $\lambda = \mu = \gamma$ යැයි ගනිමු.

$\overset{\curvearrowright}{A} = \overset{\curvearrowright}{B} = \overset{\curvearrowright}{C} \neq 0$

ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය 3ක් වටා බල පද්ධතියක ඝූර්ණවල වීජීය ඓක්‍යය ශූන්‍යයට අසමාන නියත අගයක් නම් එම බල පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ.

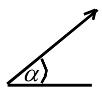
(ii) විලෝම වශයෙන් පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ යැයි ගනිමු.

$\therefore \ \overset{\curvearrowright}{A} = \overset{\curvearrowright}{B} = \overset{\curvearrowright}{C}$

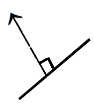
$2\lambda.\Delta ABC = 2\mu\Delta ABC = 2\gamma.\Delta ABC$

$\therefore \ \lambda = \mu = \gamma$

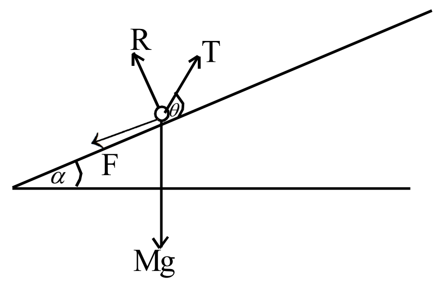
(c) M සමතුලිතතාවට



$$T\cos\theta - F - Mg\sin\alpha = 0$$



$$R + T\sin\theta - Mg\cos\alpha = 0$$



සීමාකාරී විට $\dfrac{F}{R} = \mu$

$$\frac{T\cos\theta - Mg\sin\alpha}{Mg\cos\alpha - T\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$T\cos(\theta-\lambda) = Mg\sin(\alpha+\lambda)$$

$$T = \frac{Mg\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)} \quad \text{——————} \quad (1)$$

T අවම වීමට $\cos(\theta-\lambda)$ උපරිම විය යුතු ය.

$$\cos(\theta-\lambda) = 1$$

$$\theta = \lambda$$

$$T\text{අවම} = Mg\sin(\alpha+\lambda)$$

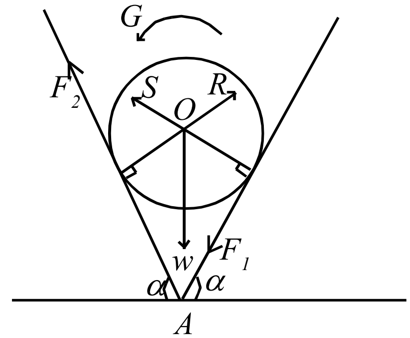
අවශ්‍ය අඩු ම බලය ලැබෙන්නේ $\theta = 0$ in (1) විට යි.

එවිට (1)න්

අවශ්‍ය බලය $= \dfrac{Mg\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(-\lambda)}$

$$= \frac{P}{\cos\lambda} = P\sec\lambda$$

12 (a) සමතුලිතතාව සඳහා O



$O\curvearrowright$ $G - F_1.a - F_2.a = 0$

$G = \left(F_1 + F_2\right)a$

සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ දී

$F_1 = \mu S$, $F_2 = \mu R$

$G = \mu a\left(R + S\right)$ ——— (1)

$A\curvearrowright$ $S.a\tan\alpha - R.a\tan\alpha + G = 0$

$G = a\tan\alpha(R - S)$ ——— (2)

$\uparrow$ $(R + S)\cos\alpha + F_2\sin\alpha - F_1\sin\alpha - w = 0$

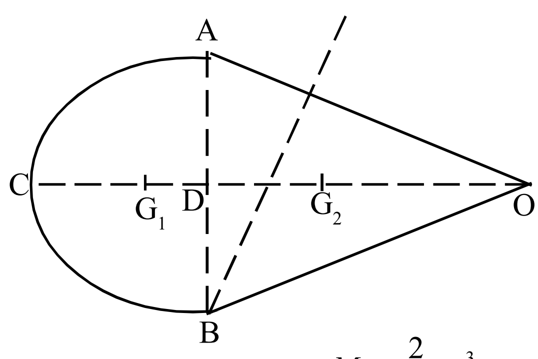
$(R + S)\cos\alpha + \mu\sin\alpha(R - S) - w = 0$ ——— (3)

(1) හා (2) $\dfrac{G\cos\alpha}{\mu a} + \mu\sin\alpha\dfrac{G}{a\tan\alpha} - w = 0$

$$\frac{G\cos\alpha}{a}\left(\frac{1}{\mu} + \mu\right) = w$$

$$G = \frac{\mu a w}{\left(1 + \mu^2\right)\cos\alpha}$$

(b) සමමිතිකතාව අනුව ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මත වේ.



අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය $M_1 = \dfrac{2}{3}\pi r^3\sigma$, $DG_1 = \dfrac{3r}{8}$

කේතුවේ ස්කන්ධය $M_2 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \times 4r \times \rho = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$

$$DG_2 = \frac{1}{4}\times 4r = r$$

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධය $\left(M_1 + M_2\right)$

Let $DG = \overline{x}$

$$D \curvearrowleft \quad \left(M_1 + M_2\right)\overline{x} = M_2.DG_2 - M_1.DG_1$$

$$\left(\frac{2}{3}\pi r^3 \sigma + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\overline{x} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho r - \frac{2}{3}\pi r^3 \sigma \times \frac{3r}{8}$$

$$\frac{2}{3}\pi r^3\left(\sigma + 2\rho\right)\overline{x} = \frac{4}{3}\pi r^4\left(\rho - \frac{3\sigma}{8}\right)$$

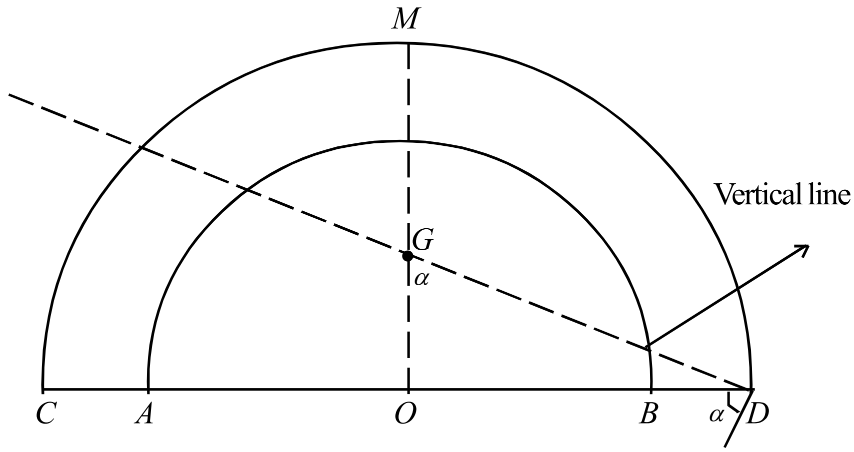
$$\overline{x} = \frac{r}{8}\frac{\left(16\rho - 3\sigma\right)}{\left(\sigma + 2\rho\right)}$$

$\rho = \sigma$ විට $\qquad \overline{x} = \dfrac{13r}{24}$

$$\tan\theta = \frac{r}{\overline{x}} = \frac{24}{13}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{24}{13}\right)$$

13.



සමමිතිකතාව අනුව ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OM මත වේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය
අර්ධ ගෝලය CMD	$M_1 = \frac{2}{3}\pi(2a)^3\rho$	$OG_1 = \frac{3}{8}\times 2a = \frac{3a}{4}$
අර්ධ ගෝලය ALB	$M_2 = \frac{2}{3}\pi a^3\rho$	$OG_2 = \frac{3a}{8}$
පාත්‍රය CD	$M_1 - M_2 = \frac{14}{3}\pi a^3\rho$	OG

O↻ $\quad (M_1 - M_2)OG = M_1.OG_1 - M_2.OG_2$

$$\frac{14}{3}\pi a^3\rho OG = \frac{16}{3}\pi a^3 \times \frac{3a}{4} - \frac{2}{3}\pi a^3 \times \frac{3a}{8}$$

$$OG = \frac{45a}{56}$$

$$\tan\alpha = \frac{2a}{OG} = \frac{112}{45}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{112}{45}\right)$$

පෙරළෙන මොහොතේ දී

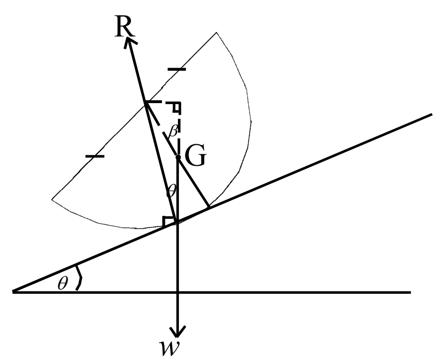
$$a\sin\theta = OGSn\beta \le OG$$

$$a\sin\theta \le OG$$

$$\sin\theta \le \frac{45a}{56a}$$

$$\sin\theta \le \frac{45}{56}$$

$$\theta \le \sin^{-1}\left(\frac{45}{56}\right)$$



14. (*a*) පහත අංකන භාවිත කරන්න.

S: ඔහු මුහුදු යයි

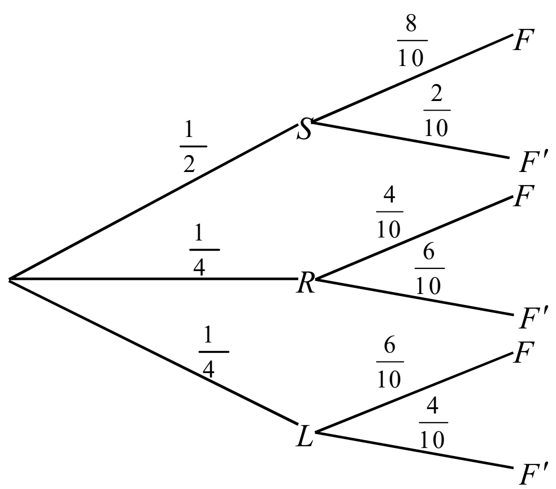
R: ඔහු ගඟට යයි

L: ඔහු විලට යයි.

F: ඔහු මාළු අල්ලයි.

$$P(S)=\frac{1}{2},\qquad P(R)=\frac{1}{4},\qquad P(L)=\frac{1}{4}$$

$$P(F|S)=\frac{8}{10},\qquad P(F|R)=\frac{4}{10},\qquad P(F|L)=\frac{6}{10}$$



$$P(S\cap F)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}$$

$$P(S\cap F')=\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}$$

$$P(R\cap F)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}$$

$$P(R\cap F')=\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}$$

$$P(L\cap F)=\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}$$

$$P(L\cap F')=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}$$

(i) මුළු සම්භාවිතා නියමයෙන්

$$P(F)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}$$

$$P(F)=\frac{13}{20}$$

(ii) P (ඉරිදා දින දෙකක මාළු ඇල්ලීමේ සම්භාවිතාව) $= {}^3C_2\times\left(\frac{13}{20}\right)^2\times\frac{7}{20}$

P (ඉරිදා දින 3 දීම මාළු ඇල්ලීමේ සම්භාවිතාව) $= {}^3C_3\times\left(\frac{13}{20}\right)^3$

අවශ්‍ය සම්භාවිතාව $= {}^3C_2\times\left(\frac{13}{20}\right)^2\times\frac{7}{20}+{}^3C_3\times\left(\frac{13}{20}\right)^3$

$$=\frac{2873}{4000}$$

(iii) $P(F)=\dfrac{13}{20}, \quad P(F')=\dfrac{7}{20}$

$$P\left(S\middle|F'\right)=\frac{P\left(S\cap F'\right)}{P\left(F'\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}}{\frac{7}{20}}=\frac{2}{7}$$

$$P\left(R\middle|F'\right)=\frac{P\left(R\cap F'\right)}{P\left(F'\right)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}}{\frac{7}{20}}=\frac{3}{7}$$

$$P\left(L\middle|F'\right)=\frac{P\left(L\cap F'\right)}{P\left(F'\right)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}}{\frac{7}{20}}=\frac{2}{7}$$

එනම් වැඩි හැකියාව ඇත්තේ ගඟට යාමට යි.

(iv) දෙන ලද ඉරිදාවක

P (දෙදෙනා ම මුහුදට යාමේ සම්භාවිතාව) $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

P (දෙදෙනා ම ගඟට යාමේ සම්භාවිතාව) $=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

P (දෙදෙනා ම විලට යාමේ සම්භාවිතාව) $=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

P (දෙදෙනා මුණ ගැසීමේ සම්භාවිතාව) $=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$

P (දෙදෙනා ඉරිදා දින දෙකකදී මුණ නොගැසීමේ සම්භාවිතාව) $=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

එක් දවසක දී වත් දෙදෙනා හමු වීමේ සම්භාවිතාව $=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

14. (b)

	f	x	$d=\dfrac{x-450}{100}$	fd	fd^2
800 - 900	14	850	4	56	224
700 - 800	30	750	3	90	270
600 - 700	52	650	2	104	208
500 - 600	79	550	1	79	79
400 - 500	206	450	0	0	0
300 - 400	146	350	-1	-146	146
200 - 300	88	250	-2	-176	352
100 - 200	45	150	-3	-135	405
		660		-128	1684

(i) මධ්‍යන්‍යය $\bar{x} = 450 + 100\left(\dfrac{-128}{660}\right)$

$\bar{x} = 469.39$

(ii) සම්මත අපගමනය $S = 100\sqrt{\dfrac{1684}{660} - \left(\dfrac{-128}{660}\right)^2}$

$S = 158.55$

(iii) මධ්‍යස්ථ පන්තිය $= (400 - 500)$

මධ්‍යස්ථය $= 400 + \dfrac{100}{206}\left(\dfrac{660}{2} - 279\right)$

$= 400 + 100 \times \dfrac{51}{206}$

$= 424.75$

(iv) කුටිකතා සංගුණකය $= 3\dfrac{(\text{මධ්‍යන්‍යය} - \text{මධ්‍යස්ථය})}{\text{සම්මත අපගමනය}}$

$= 3\dfrac{(469.39 - 424.75)}{158.55}$

$= 0.8446$

(v) ධන කුටිකතාවක් ඇති වක්‍රයකි.

15. (*a*) පහත අංකන භාවිත කරන්න

A: වැඩිහිටි

C: ළමා

M: පිරිමි

F: ගැහැනු

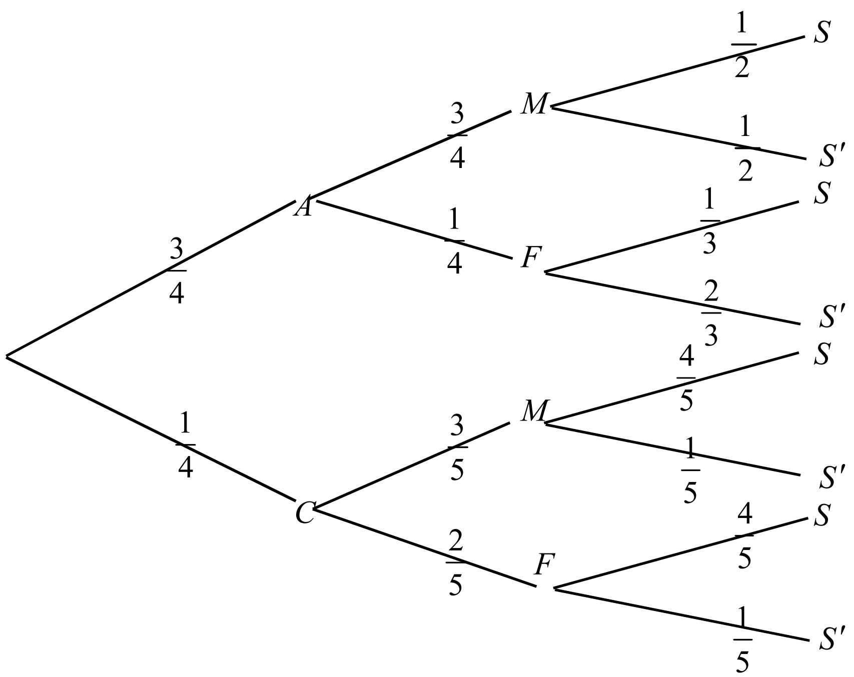
S: පිහිනුම් තටාකය භාවිත කිරීම

$P(A)=\frac{3}{4},\qquad P(C)=\frac{1}{4},$

$P(M|C)=\frac{3}{5},\qquad P(F|A)=\frac{1}{4},\qquad P(F|C)=\frac{2}{5}$

$P\left(S|A\cap M\right)=\frac{1}{2},\quad P\left(S|A\cap F\right)=\frac{1}{3},$

$P\left(S|C\cap M\right)=\frac{4}{5},\quad P\left(S|C\cap F\right)=\frac{4}{5}$



(i) $$P(S)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\right)$$

$$P(S)=\frac{9}{32}+\frac{1}{16}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}=\frac{87}{160}$$

(ii) $$P(F|S)=\frac{P(S\cap F)}{P(S)}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}}{\frac{87}{160}}$$

$$=\frac{\frac{1}{16}+\frac{2}{25}}{\frac{87}{160}}$$

$$P(F|S)=\frac{114}{435}=0.262$$

(iii) $$P\left(C \middle| M\cap S\right)=\frac{P\left(M\cap S\cap C\right)}{P(M\cap S)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{9}{32}+\frac{3}{25}}$$

$$P\left(C \middle| M\cap S\right)=\frac{3}{25}\times\frac{25\times 32}{321}=0.2999$$

(iv) $$P\left(A\cup F \middle| S'\right)=\frac{P\left[\left(A\cup F\right)\cap S'\right]}{P\left(S'\right)}$$

$$P\left(S'\right)=1-\frac{87}{160}=\frac{73}{160}$$

දැන් $\left(A\cup F\right)\cap S'=\left(A\cap S'\right)\cup\left(F\cap S'\right)$

එම නිසා $\left(A\cap S'\right)\cup\left(F\cap S'\right)=\left(A\cap M\cap S'\right)\cup\left(A\cap F\cap S'\right)\cup\left(C\cap F\cap S'\right)$

දකුණු පස ඇති සිද්ධි තුන ම අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වන නිසා,

එනයින්, $P\left[\left(A\cup F\right)\cap S'\right]=P\left[A\cap M\cap S'\right]+\left[A\cap F\cap S'\right]+P\left[C\cap F\cap S'\right]$

$$=\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\right)$$

$$P\left[\left(A\cup F\right)\cap S'\right]=\frac{9}{32}+\frac{1}{8}+\frac{1}{50}=\frac{341}{800}$$

$$P\left[\left(A\cup F\right)/S'\right]=\frac{P\left[\left(A\cup F\right)\cap S'\right]}{P\left(S'\right)}$$

$$=\frac{\frac{341}{800}}{\frac{73}{160}}$$

$$=\frac{341}{365}$$

$$P\left[\left(A\cup F\right)/S'\right]=0.934$$

15. (*b*) $$\mu_1 = \frac{\sum_1^{n_1} x_i}{n_1}$$

$$\sum_1^{n_1} x_i = n_1\mu_1, \quad \sum_1^{n_2} x_i = n_2\mu_2$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_1^{n_1} x_i^2}{n_1} - \mu_2^1$$

$$\sum_1^{n_1} x_i^2 = n_1\sigma_1^2 + n_1\mu_1^2$$

මෙලෙසම, $\sum_1^{n_2} x_i = n_2\sigma_2^2 + n_2\mu_2^2$

මධ්‍යන්‍යය සංගණනය $\overline{X} = \dfrac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{n_1}{n_1 + n_2}\mu_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2}\mu_2$$

$$\overline{X} = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2$$

මෙහි $\omega_1 = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$, $\omega_2 = \dfrac{n_2}{n_1 + n_2}$ වේ.

සංගණන විචලතාව $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_i}{n_1 + n_2} - \overline{X}^2$

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}\left[\sum_1^{n_1} x_i^2 + \sum_1^{n_2} x_i^2\right] - \overline{X}^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}\left[n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1\mu_1^2 + n_2\mu_2^2\right] - \left[\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}\right]^2$$

$$= \frac{n_1\sigma_1^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{(n_1 + n_2)}{(n_1 + n_2)^2}\left[n_1\mu_1^2 + n_2\mu_2^2\right] - \left[\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}\right]^2$$

$$= \frac{n_1\sigma_1^{\,2}}{n_1+n_2} + \frac{n_2\sigma_2^{\,2}}{n_1+n_2} + \frac{1}{(n_1+n_2)^2}\left[\begin{array}{l} n_1(n_1+n_2)\mu_1^{\,2} + n_2(n_1+n_2)\mu_2^{\,2} \\ -2n_1n_2\mu_1\mu_2 - n_1^{\,2}\mu_1^{\,2} - n_2^{\,2}\mu_2 \end{array}\right]$$

$$= \omega_1\sigma_1^{\,2} + \omega_2\sigma_2^{\,2} + \frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}\left[\mu_1^2 + \mu^2 - 2\mu_1\mu_2\right]$$

$$S^2 = \omega_1\sigma_1^{\,2} + \omega_2\sigma_2^{\,2} + \omega_1\omega_2(\mu_1 - \mu_2)^2$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$40 = \frac{\sum X}{20}$$

වැරදි ඓක්‍යය $\sum X = 800$

නිවැරදි ඓක්‍යය $\sum X = 800 - 50 + 15$

$= 765$

නිවැරදි $\bar{X} = \frac{765}{20} = 38.25$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$25 = \frac{\sum x_i^2}{20} - 40^2$$

වැරදි $\sum x_i^2 = 500 + 1600 \times 20 = 32500$

නිවැරදි $\sum x_i^2 = 32500 - 2500 + 225$

$= 30225$

නිවැරදි $\sigma^2 = \frac{30225}{20} = 38.25^2$

$= 1511.25 - 38.25^2$

$= 48.19$

$\sigma = \sqrt{48.19}$

$\sigma = 6.94$

මුළු සංගණනය සඳහා $\mu = \frac{20 \times 38.25 + 30 \times 40.25}{20 + 30}$

$$= \frac{765 + 1207.5}{50}$$

$$\mu = \frac{1972.5}{50}$$

$$\mu = 39.45$$

$$\sigma^2 = \omega_1 \sigma_1{}^2 + \omega_2 \sigma_2{}^2 + \omega_1 \omega_2 \left(\mu_1 - \mu_2\right)^2$$

$$= \frac{20}{50} \times 6.94^2 + \frac{30}{50} \times 8^2 + \frac{20 \times 30}{50 \times 50}\left(40.25 - 30.25\right)^2$$

$$= \frac{2}{5} \times 48.19 + \frac{3}{5} \times 64 + \frac{6}{25} \times 4$$

$$= \frac{481.9 + 960 + 24}{25}$$

$$\sigma^2 = \frac{1465.9}{25}$$

$$= 58.636$$

$$\sigma = \sqrt{58.636}$$

$$\sigma = 7.65$$